



جامعة البعث.

كلية العلوم.

قسم الرياضيات.

السنة الرابعة (ميكانيك).

علم المرونة

القسم النظري

المحاضرة الأولى

مقدمة عامة: (تصلح لميكانيك السوائل وعلم المرونة).**تعريف أساسية:**

- **النقطة المادية:** هي نقطة هندسية M مزودة بكتلة m . ونرمز عادة للنقطة المادية بالرمز (M, m) .
- **كتلة النقطة المادية:** هي مقدار موجب يدل على ممانعة النقطة المادية عن الحركة.
- **المجموعة المادية:** إذا كانت $(M_1, m_1), (M_2, m_2), \dots, (M_n, m_n)$ نقاط مادية فإننا ندعوا المجموعة $S := \{(M_1, m_1), (M_2, m_2), \dots, (M_n, m_n)\}$ بالمجموعة المادية.
- **الميكانيك:** هو العلم الذي يدرس الحركة والتحرك والتوازن.
- **العِلْم:** كل دراسة، نتائجها لا تتعلق لا بزمان ولا بمكان، وإنما محكومة بقوانين وعلاقات.
- **علم الحركة:** هو العلم الذي يدرس الحركة بإهمال المسببات التي أدت إلى هذه الحركة (يهتم بدراسة متجه الموضع والسرع والتسارعات والطاقات الحركية وعزوم الحركة و...، ويهمل دراسة القوى وأعمالها وعزوم هذه القوى ...).
- **علم التحريك:** هو العلم الذي يدرس الحركة مع الأسباب التي أدت إلى هذه الحركة.
- **علم التوازن:** هو العلم الذي يدرس مواضع التوازن.
- **الوسط المادي المستمر:** هو مجموعة مادية، كل نقطة من نقاطها تكون ملتصقة بنقطة أخرى (كالأجسام الصلبة، والسوائل الموجودة في وعاء واحد، والغازات الموجودة في حيز واحد).

نتيجة:

- الوسط المادي المستمر هو جزء من الفراغ مملوء بالمادة، وكل نقطة مادية منه تكون ملتصقة بالأخرى.
- **الجسم القاسي:** هو وسط مادي مستمر، يبقى البعد بين أي نقطتين من نقاطه ثابتاً بتغير الزمن.

- **التشوه (تشوه وسط مادي مستمر):** ليكن لدينا وسطاً مادياً مستمراً S (ليس بالضرورة جسماً قاسياً). عندئذٍ بنتيجة تطبيق قوى خارجية على هذا الوسط في اللحظة $t > 0$ فإن نقاط هذا الوسط سيعاد توزيعها من جديد في اللحظة $t > 0$ (كأن يصبح تغير بالأبعاد أو الزوايا أو كليهما ...)، ويدعى هذا الوضع الجديد، بتشوه الوسط المادي المستمر S في اللحظة $t > 0$. وبلغة الفيزياء فإن التشوه يعني تغيراً بالحجم والشكل.

نتيجة:

- تشوه الوسط المادي المستمر من وجهة النظر الفيزيائية هو تغير في الشكل والحجم للوسط المادي المستمر عن الحالة الطبيعية.
- ندعوا الحالة التي يكون فيها الوسط المادي المستمر غير مشوه بالحالة الطبيعية للوسط المادي المستمر، وهي الحالة التي يوجد فيها هذا الوسط كما أوجدته الطبيعة.
- **الجسم المرن:** هو وسط مادي مستمر توجد قوى خارجية عند تطبيقها عليه في اللحظة $t > 0$ فإنه يتشوه، وبإزالة هذه القوى المؤثرة يعود هذا الوسط إلى وضعه الأسبق قبل تطبيق القوى الخارجية عليه.
- **الجسم اللدن (البلاستيك):** هو وسط مادي مستمر توجد قوى خارجية إذا طبقناها عليه في اللحظة $t > 0$ فإنه يتشوه، وبإزالة هذه القوى فإنه لا يعود إلى الوضع السابق بشكل كامل.
- **المانع (لا نقول الجسم المانع وإنما المانع):** هو وسط مادي مستمر إذا طبقنا عليه أي قوى خارجية في اللحظة $t > 0$ فإنه يتشوه تشوهاً كاملاً وبإزالة هذه القوى عنه لا يعود إلى وضعه الأسبق حتى ولو بجزء بسيط.

تعريف: (علم المرونة).

هو العلم الذي يدرس تشوه الجسم المرن (من وجهة النظر الرياضية) ويدرس ميكانيك الجسم المرن (حركة وتحريك وتوازن الجسم المرن).

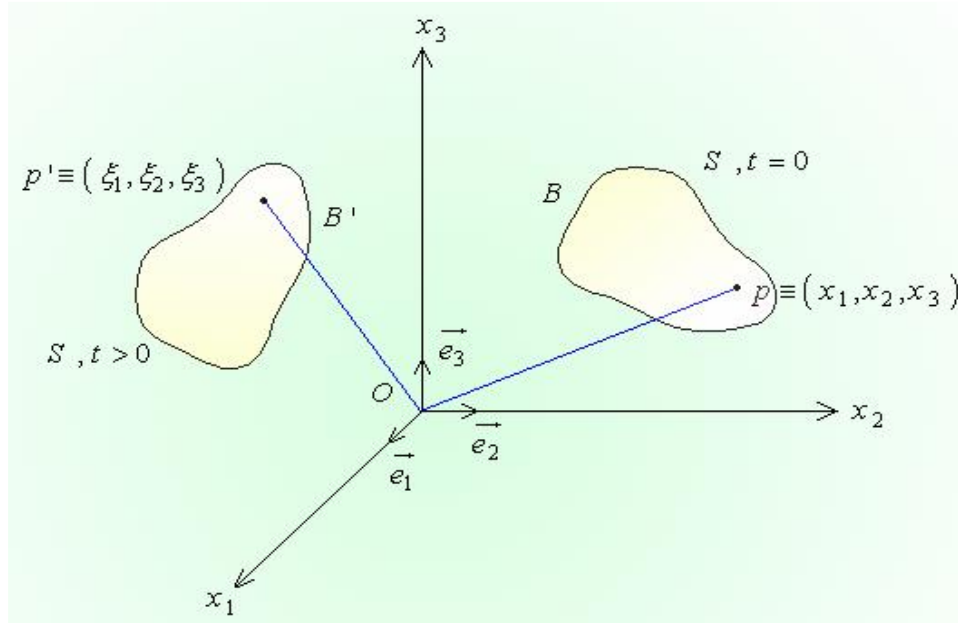
الفصل الأول

تشوه وسط مادي مستمر

لتكن جملة مقارنة ديكارتية قائمة، يمينية مباشرة، وقاعدتها $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ وليكن S وسطاً مادياً مستمراً.

في اللحظة $t = 0$ ، نفرض أن هذا الوسط يشغل الحيز الهندسي $B \subset \mathbb{R}^3$ ، ولتكن نقطة مادية من S في اللحظة $t = 0$ $p \equiv (x_1, x_2, x_3) \in B$

بنتيجة تطبيق قوى خارجية على الوسط S في اللحظة $t > 0$ فإن الوسط S سيتشوه في هذه اللحظة، ليشغل حيزاً هندسياً آخر هو $B' \subset \mathbb{R}^3$ ، وبالتالي فإن النقطة p من B ستصبح نقطة ما: $p' \equiv (\xi_1, \xi_2, \xi_3) \in B'$.



تعريف 1:

ندعوا النقطة المادية p نقطة لاغرانجية في الوسط المادي المستمر. كما ندعوا (x_1, x_2, x_3) بالإحداثيات اللاغرانجية للنقطة المادية اللاغرانجية p من S .

تعريف 2:

ندعوا النقطة p' نقطة مادية أولرية للوسط المادي المستمر في اللحظة $t > 0$. كما ندعو (ξ_1, ξ_2, ξ_3) بالإحداثيات الأولرية للنقطة المادية الأولرية p' من S في اللحظة $t > 0$.

تعريف 3:

ندعوا B بالشكل اللاغرانجي للوسط المادي المستمر S ، كما ندعو B' بالشكل الأولري للوسط المادي المستمر S في اللحظة $t > 0$.

ملاحظة 1:

فيما سبق إذا جعلنّا $t \rightarrow 0$ يجب أن يتحقق: $p' \rightarrow p$ ، أي: $\xi_1 \rightarrow x_1, \xi_2 \rightarrow x_2, \xi_3 \rightarrow x_3$ كما يجب أن يتحقق: $B \rightarrow B'$.

ملاحظة 2:

بهذا الشكل يكون قد تولد لدينا التابع:

$$\vec{F}_t : B \rightarrow B' : p \equiv (x_1, x_2, x_3) \mapsto p' \equiv (\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \vec{F}_t(p)$$

هذا التابع متجهي لأن مستقره عبارة عن مجموعة جزئية من R^3 ، الذي هو فضاء متجهي.

ومن خصائص هذا التابع أنه تقابل ومستمر. ومن تعريفه ينتج لدينا أن: $p' \equiv (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ تتبع لـ $p \equiv (x_1, x_2, x_3)$ ، وهذا لا يتحقق إلا إذا كان:

$$\left. \begin{aligned} \xi_1 &= \xi_1(p) \\ \xi_2 &= \xi_2(p) \\ \xi_3 &= \xi_3(p) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots$$

يُقصد بهذا الكلام أن كلاً من ξ_1, ξ_2, ξ_3 تكون تابعة لـ p .

وبما أن $t > 0$ تكون اختيارية، فمن فكرة التابع نجد أنه:

$$\left. \begin{aligned} \xi_1 &= \xi_1(p; t) \\ \xi_2 &= \xi_2(p; t) \\ \xi_3 &= \xi_3(p; t) \end{aligned} \right\} \dots\dots (1)$$

وجود الفاصلة المنقوطة (;) يعني أن الزمن يُعامل معاملة البارامتر (أي الوسيط).

تعريف 4:

كل تابع يتبع لـ t, x_1, x_2, x_3 أو بكلام آخر يتبع لـ t, p يدعى تابعاً لاغرانجياً.
وكل تابع يتبع لـ t, ξ_1, ξ_2, ξ_3 أو بكلام آخر يتبع لـ t, p' يدعى تابعاً أولرياً.

تعريف 5: (متجه الإزاحة).

لنضع: $\vec{r} = \overrightarrow{Op} = x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2 + x_3 \vec{e}_3$ ، ولنضع: $\vec{r}' = \overrightarrow{Op'} = \xi_1 \vec{e}_1 + \xi_2 \vec{e}_2 + \xi_3 \vec{e}_3$.
عندئذٍ نسمي المتجه:

$$\vec{u} := \overrightarrow{pp'} = \overrightarrow{Op'} - \overrightarrow{Op} \dots\dots (2)$$

بمتجه إزاحة النقطة p في اللحظة $t > 0$.

مركبات متجه الإزاحة $\vec{u}$:

$$\vec{u} = u_1 \vec{e}_1 + u_2 \vec{e}_2 + u_3 \vec{e}_3$$

عندئذٍ بإسقاط طرفي العلاقة (2) على المحاور $\overrightarrow{Ox_1}, \overrightarrow{Ox_2}, \overrightarrow{Ox_3}$ نجد:

$$\left. \begin{aligned} u_1 &= \xi_1 - x_1 \\ u_2 &= \xi_2 - x_2 \\ u_3 &= \xi_3 - x_3 \end{aligned} \right\} \dots\dots (3)$$

بالإسقاط على المحور $\overrightarrow{Ox_1}$ نجد:

بالإسقاط على المحور $\overrightarrow{Ox_2}$ نجد:

بالإسقاط على المحور $\overrightarrow{Ox_3}$ نجد:

إن العلاقات (3) تعطينا مركبات متجه الإزاحة للنقطة p في اللحظة $t > 0$.

المركبات الديكارتية اللاغرانجية لمتجه إزاحة النقطة p في اللحظة $t > 0$:

وجدنا في الفقرة السابقة أن المركبات الديكارتية لمتجه الإزاحة $\vec{u}$ تعطى بالعلاقات (3) على الشكل:

$$\left. \begin{aligned} u_1 &= \xi_1 - x_1 \\ u_2 &= \xi_2 - x_2 \\ u_3 &= \xi_3 - x_3 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3)$$

كما وجدنا من العلاقات (1) أن:

$$\left. \begin{aligned} \xi_1 &= \xi_1(p ; t) \\ \xi_2 &= \xi_2(p ; t) \\ \xi_3 &= \xi_3(p ; t) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (1)$$

الآن بتعويض (1) في (3) نجد:

$$\left. \begin{aligned} u_1 &= \xi_1(p ; t) - x_1 = u_1(x_1, x_2, x_3 ; t) \\ u_2 &= \xi_2(p ; t) - x_2 = u_2(x_1, x_2, x_3 ; t) \\ u_3 &= \xi_3(p ; t) - x_3 = u_3(x_1, x_2, x_3 ; t) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (*)$$

ندعو العلاقات (*) السابقة بالمركبات الديكارتية اللاغرانجية لمتجه الإزاحة $\vec{u}$.

انتهت المحاضرة.

بناريخ 3 10 2010 .



جامعة البعث.

كلية العلوم.

قسم الرياضيات.

السنة الرابعة (ميكانيك).

علم المرونة

القسم النظري

المحاضرة الثانية

قبل الدخول في فقرة المركبات الديكارتية الأولية لمتجه الإزاحة $\vec{u}$ ، يلزمنا بعض المفاهيم الهامة من مقرر التحليل 4.

تعريف 1:

لنكن D مجموعة مفتوحة في الفضاء الإقليدي $\mathbb{R}^n$ ، وليكن:

$$F : D \rightarrow \mathbb{R} ; M \equiv (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \mapsto F(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$$

تابع حقيقي معرف على D .

نقول أن F من الصف C^m على D ونكتب رمزاً لذلك $F \in C^m(D)$ ، إذا وفقط إذا كان F مستمر في D ، ويملك مشتقات جزئية حتى المرتبة m وجميعها مستمرة في D .

نتيجة:

$$F \in C^0(D) \text{ يُقصد بها أن } F \text{ مستمر في } D.$$

مبرهنة 1: (تقبل دون ذكر البرهان).

لنكن D, E مجموعتان مفتوحتان في $\mathbb{R}^3$ و $\vec{F}$ دالة متجهية معرفة بالشكل:

$$\begin{aligned} \vec{F} : D \rightarrow E ; (u_1, u_2, u_3) &\mapsto \vec{F}(u_1, u_2, u_3) \\ &:= [v_1(u_1, u_2, u_3), v_2(u_1, u_2, u_3), v_3(u_1, u_2, u_3)] \end{aligned}$$

ولنفرض أنها دالة تقابل، وأن التوابع الحقيقية: $v_1, v_2, v_3 : D \rightarrow \mathbb{R}$ هي من الصف C^1 في D . ولنفرض أيضاً أن المعين اليعقوبي التالي لا يساوي الصفر وذلك مهما تكن

$$:(u_1, u_2, u_3) \in D$$

$$J(u_1, u_2, u_3) = \frac{D(v_1, v_2, v_3)}{D(u_1, u_2, u_3)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial v_1}{\partial u_1}(u_1, u_2, u_3) & \frac{\partial v_1}{\partial u_2}(u_1, u_2, u_3) & \frac{\partial v_1}{\partial u_3}(u_1, u_2, u_3) \\ \frac{\partial v_2}{\partial u_1}(u_1, u_2, u_3) & \frac{\partial v_2}{\partial u_2}(u_1, u_2, u_3) & \frac{\partial v_2}{\partial u_3}(u_1, u_2, u_3) \\ \frac{\partial v_3}{\partial u_1}(u_1, u_2, u_3) & \frac{\partial v_3}{\partial u_2}(u_1, u_2, u_3) & \frac{\partial v_3}{\partial u_3}(u_1, u_2, u_3) \end{vmatrix}$$

عندئذ يكون لجملة المعادلات التالية:

$$\begin{cases} v_1 = v_1(u_1, u_2, u_3) \\ v_2 = v_2(u_1, u_2, u_3) \\ v_3 = v_3(u_1, u_2, u_3) \end{cases}$$

حلاً وحيداً في D هو:

$$\begin{cases} u_1 = u_1(v_1, v_2, v_3) \\ u_2 = u_2(v_1, v_2, v_3) \\ u_3 = u_3(v_1, v_2, v_3) \end{cases}$$

نتيجة:

إذا ثبتنا $t > 0$ فإن التابع المتجهي:

$$\vec{F}_t : B \rightarrow B' ; p \equiv (x_1, x_2, x_3) \mapsto p' \equiv (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$$

والذي يكتب بالشكل:

$$\vec{F}_t : B \rightarrow B' ; p \equiv (x_1, x_2, x_3) \mapsto p' \equiv [\xi_1(p), \xi_2(p), \xi_3(p)] = \vec{F}_t(p)$$

هو تابع تقابل. فإذا فرضنا أن الدوال:

$$\xi_1, \xi_2, \xi_3 : B \rightarrow \mathbb{R} ; p \mapsto \xi_1(p), \xi_2(p), \xi_3(p)$$

من الصف C^1 من B ، وأن المعين اليعقوبي:

$$J(p) = \frac{D(\xi_1, \xi_2, \xi_3)}{D(x_1, x_2, x_3)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial \xi_1}{\partial x_1}(p) & \frac{\partial \xi_1}{\partial x_2}(p) & \frac{\partial \xi_1}{\partial x_3}(p) \\ \frac{\partial \xi_2}{\partial x_1}(p) & \frac{\partial \xi_2}{\partial x_2}(p) & \frac{\partial \xi_2}{\partial x_3}(p) \\ \frac{\partial \xi_3}{\partial x_1}(p) & \frac{\partial \xi_3}{\partial x_2}(p) & \frac{\partial \xi_3}{\partial x_3}(p) \end{vmatrix} \neq 0 ; \forall p \in B$$

عندئذ يكون لجملة المعادلات:

$$\begin{cases} \xi_1 = \xi_1(x_1, x_2, x_3) \\ \xi_2 = \xi_2(x_1, x_2, x_3) \\ \xi_3 = \xi_3(x_1, x_2, x_3) \end{cases}$$

حلاً وحيداً في B هو:

$$\begin{cases} x_1 = x_1(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \\ x_2 = x_2(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \\ x_3 = x_3(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \end{cases}$$

وكلما غيرنا $t > 0$ نحصل على حل وحيد جديد.

ينتج عن ذلك أن:

$$(*) \quad \begin{cases} x_1 = x_1(\xi_1, \xi_2, \xi_3; t) \\ x_2 = x_2(\xi_1, \xi_2, \xi_3; t) \\ x_3 = x_3(\xi_1, \xi_2, \xi_3; t) \end{cases}$$

المركبات الديكارتية الأولرية لمتجه الإزاحة $\vec{u}$:

وجدنا في المحاضرة السابقة أن المركبات الديكارتية لمتجه الإزاحة $\vec{u}$ تعطى بـ:

$$\left. \begin{aligned} u_1 &= \xi_1 - x_1 \\ u_2 &= \xi_2 - x_2 \\ u_3 &= \xi_3 - x_3 \end{aligned} \right\} (*)'$$

وللحصول على المركبات الديكارتية الأولرية لمتجه الإزاحة $\vec{u}$ ، يكفي أن نعوض العلاقات (*) في العلاقات (*)'، فنجد:

$$(*)'' \quad \begin{cases} u_1 = \xi_1 - x_1(\xi_1, \xi_2, \xi_3; t) = u_1(\xi_1, \xi_2, \xi_3; t) \\ u_2 = \xi_2 - x_2(\xi_1, \xi_2, \xi_3; t) = u_2(\xi_1, \xi_2, \xi_3; t) \\ u_3 = \xi_3 - x_3(\xi_1, \xi_2, \xi_3; t) = u_3(\xi_1, \xi_2, \xi_3; t) \end{cases}$$

إن العلاقات (*)'' تعطينا المركبات الديكارتية الأولرية لمتجه الإزاحة $\vec{u}$.

تمرين : (وظيفة).

لتكن $p \equiv (x_1, x_2, x_3)$ نقطة مادية لاغرانجية من وسط مادي مستمر .
 في لحظة التشوه $t > 0$ ، نفرض أن p تصبح النقطة المادية الأولرية $p' \equiv (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$
 حيث :

$$\xi_1 = x_1 \cos wt + x_2 \sin wt$$

$$\xi_2 = -x_1 \sin wt + x_2 \cos wt$$

$$\xi_3 = \frac{x_3}{1 + \sqrt{t}}$$

حيث $w > 0$ مقدار ثابت ومعلوم . والمطلوب ما يلي :

(1) أوجد المركبات الديكارتية اللاغرانجية لمتجه الإزاحة $\vec{u}$.

(2) أوجد :

$$\begin{cases} x_1 = x_1(\xi_1, \xi_2, \xi_3; t) \\ x_2 = x_2(\xi_1, \xi_2, \xi_3; t) \\ x_3 = x_3(\xi_1, \xi_2, \xi_3; t) \end{cases}$$

(3) أوجد المركبات الديكارتية الأولرية لمتجه الإزاحة $\vec{u}$.

انتهت المحاضرة .

بنامريخ 5 10 2010 .



جامعة البعث.

كلية العلوم.

قسم الرياضيات.

السنة الرابعة (ميكانيك).

علم المرونة

القسم النظري

المحاضرة الثالثة

تمرين : (وظيفة).

لتكن $p \equiv (x_1, x_2, x_3)$ نقطة لاغرانجية من وسط مادي مستمر S .
 في لحظة التشوه $t > 0$ نفرض أن p تصبح النقطة المادية الأولرية $p' \equiv (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$
 حيث:

$$\left. \begin{aligned} \xi_1 &= x_1 \cos wt + x_2 \sin wt \\ \xi_2 &= -x_1 \sin wt + x_2 \cos wt \\ \xi_3 &= \frac{x_3}{1 + \sqrt{t}} \end{aligned} \right\} (*)$$

حيث $w > 0$ مقدار ثابت ومعلوم. والمطلوب ما يلي:

(1) أوجد المركبات الديكارتية اللاغرانجية لمتجه الإزاحة $\vec{u}$.

(2) أوجد:

$$\left\{ \begin{aligned} x_1 &= x_1(\xi_1, \xi_2, \xi_3; t) \\ x_2 &= x_2(\xi_1, \xi_2, \xi_3; t) \\ x_3 &= x_3(\xi_1, \xi_2, \xi_3; t) \end{aligned} \right.$$

(3) أوجد المركبات الديكارتية الأولرية لمتجه الإزاحة $\vec{u}$.

الحل:

(1) نعلم أن المركبات الديكارتية اللاغرانجية لمتجه الإزاحة $\vec{u}$ هي:

$$\left\{ \begin{aligned} u_1 &= \xi_1(p; t) - x_1 = u_1(x_1, x_2, x_3; t) \\ u_2 &= \xi_2(p; t) - x_2 = u_2(x_1, x_2, x_3; t) \\ u_3 &= \xi_3(p; t) - x_3 = u_3(x_1, x_2, x_3; t) \end{aligned} \right.$$

بالتعويض لمعطيات المسألة في العلاقات السابقة نجد:

$$u_1(x_1, x_2, x_3; t) = x_1 (\cos wt - 1) + x_2 \sin wt$$

$$u_2(x_1, x_2, x_3; t) = -x_1 \sin wt + x_2 (\cos wt - 1)$$

$$u_3(x_1, x_2, x_3; t) = x_3 \left(\frac{1}{1 + \sqrt{t}} - 1 \right)$$

(2) إن (*) هي عبارة عن جملة ثلاث معادلات غير متجانسة بثلاث مجاهيل x_1, x_2, x_3 والمعالم t, ξ_1, ξ_2, ξ_3 ، ولنوجد حل هذه الجملة بطريقة كرامر:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \cos wt & \sin wt & 0 \\ -\sin wt & \cos wt & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{1 + \sqrt{t}} \end{vmatrix} = \frac{1}{1 + \sqrt{t}}$$

ومنه نجد:

$$x_1 = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} \xi_1 & \sin wt & 0 \\ \xi_2 & \cos wt & 0 \\ \xi_3 & 0 & \frac{1}{1 + \sqrt{t}} \end{vmatrix} = (1 + \sqrt{t}) \frac{1}{1 + \sqrt{t}} (\xi_1 \cos wt - \xi_2 \sin wt)$$

$$\Rightarrow x_1 = x_1(\xi_1, \xi_2, \xi_3; t) = \xi_1 \cos wt - \xi_2 \sin wt$$

وكذلك نجد:

$$x_2 = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} \cos wt & \xi_1 & 0 \\ -\sin wt & \xi_2 & 0 \\ 0 & \xi_3 & \frac{1}{1 + \sqrt{t}} \end{vmatrix} = (1 + \sqrt{t}) \frac{1}{1 + \sqrt{t}} (\xi_2 \cos wt + \xi_1 \sin wt)$$

$$\Rightarrow x_2 = x_2(\xi_1, \xi_2, \xi_3; t) = \xi_2 \cos wt + \xi_1 \sin wt$$

وبالاستفادة المباشرة من المعادلة الثالثة في الجملة (*) نجد:

$$x_3 = x_3(\xi_1, \xi_2, \xi_3; t) = \xi_3 (1 + \sqrt{t})$$

(3) نعلم أن المركبات الديكارتية الأولرية لمتجه الإزاحة $\vec{u}$ تعطى:

$$\begin{cases} u_1 = \xi_1 - x_1(\xi_1, \xi_2, \xi_3; t) = u_1(\xi_1, \xi_2, \xi_3; t) \\ u_2 = \xi_2 - x_2(\xi_1, \xi_2, \xi_3; t) = u_2(\xi_1, \xi_2, \xi_3; t) \\ u_3 = \xi_3 - x_3(\xi_1, \xi_2, \xi_3; t) = u_3(\xi_1, \xi_2, \xi_3; t) \end{cases}$$

وبالاستفادة من الطلب السابق نعوض:

$$\begin{cases} u_1(\xi_1, \xi_2, \xi_3; t) = \xi_1 (1 - \cos \omega t) - \xi_2 \sin \omega t \\ u_2(\xi_1, \xi_2, \xi_3; t) = \xi_2 (1 - \cos \omega t) + \xi_1 \sin \omega t \\ u_3(\xi_1, \xi_2, \xi_3; t) = -\xi_3 \sqrt{t} \end{cases}$$

انتهت المحاضرة.

بنامريغ 7 10 2010 .



جامعة البعث.

كلية العلوم.

قسم الرياضيات.

السنة الرابعة (ميكانيك).

علم المرونة

القسم النظري

المحاضرة الرابعة

ملاحظة: (من الهندسة التفاضلية).

ليكن $[a, b]$ مجال حقيقي مغلق ومحدود في R ، ولتكن الدوال الحقيقية:

$$x : [a, b] \rightarrow R ; q \mapsto x(q)$$

$$y : [a, b] \rightarrow R ; q \mapsto y(q)$$

$$z : [a, b] \rightarrow R ; z \mapsto y(q)$$

فإذا كانت الدوال الحقيقية x, y, z مستمرة في المجال $[a, b]$ ، فإننا نقول أن العلاقات:

$$x = x(q), y = y(q), z = z(q) ; q \in [a, b]$$

تعين لنا منحنياً Γ في R^3 وسيطه q . ونحصل على مسار هذا المنحني Γ بحذف الوسيط q من المعادلات المعينة بالعلاقات الثلاث السابقة.

الشكل الأولي لوسط مادي مستمر شكله اللاغرانجي قطعة مستقيمة توازي المحور $\overrightarrow{Ox_3}$:

لتكن $p \equiv (x_1, x_2, x_3)$ نقطة لاغرانجية من وسط مادي مستمر، ولنفرض أن النقطة الأولرية الموافقة لـ p في اللحظة $t > 0$ هي $p' \equiv (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$. وجدنا سابقاً أن:

$$\left. \begin{aligned} \xi_1 &= \xi_1(x_1, x_2, x_3; t) \\ \xi_2 &= \xi_2(x_1, x_2, x_3; t) \\ \xi_3 &= \xi_3(x_1, x_2, x_3; t) \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

ولنفرض الآن أن:

$$\begin{aligned} x_1 &= c_1 ; c_1 = \text{const} \\ x_2 &= c_2 ; c_2 = \text{const} \end{aligned} \quad \dots\dots (2)$$

$$x_3 \in [a, b]$$

هذا يعني أن الشكل اللاغرانجي B للوسط المادي المستمر هو قطعة مستقيمة Γ توازي المحور $\overrightarrow{Ox_3}$. ولمعرفة الشكل الأولي B' في اللحظة المثبتة $t = c = \text{const} > 0$ ، لهذا

الوسط المادي المستمر نعوض (2) في (1) آخذين بعين الاعتبار أن $t = c = \text{const} > 0$ فنجد:

$$\begin{aligned}\xi_1 &= \xi_1(c_1, c_2, x_3; c) = \xi_1(x_3) \\ \xi_2 &= \xi_2(c_1, c_2, x_3; c) = \xi_2(x_3) \quad ; \quad x_3 \in [a, b] \quad \dots\dots\dots (3) \\ \xi_3 &= \xi_3(c_1, c_2, x_3; c) = \xi_3(x_3)\end{aligned}$$

وبالتالي فإن الشكل الأولي B' للوسط المادي المستمر في اللحظة $t = c > 0$ هو منحني Γ' معطى بالعلاقات (3)، وسيطه $x_3 \in [a, b]$.

الشكل اللاغرانجي لوسط مادي مستمر شكله الأولي في اللحظة $t > 0$ هو قطعة مستقيمة توازي المحور $\overrightarrow{Ox_3}$:

من أجل اللحظة المثبتة $t > 0$ لنحل جملة المعادلات (1):

$$\left. \begin{aligned}\xi_1 &= \xi_1(x_1, x_2, x_3; t) \\ \xi_2 &= \xi_2(x_1, x_2, x_3; t) \\ \xi_3 &= \xi_3(x_1, x_2, x_3; t)\end{aligned} \right\} \quad (1)$$

حيث أن المجاهيل هي x_1, x_2, x_3 والمعالم هي ξ_1, ξ_2, ξ_3, t فنحصل على الحل الوحيد التالي:

$$\begin{aligned}x_1 &= x_1(\xi_1, \xi_2, \xi_3; t) \\ x_2 &= x_2(\xi_1, \xi_2, \xi_3; t) \quad \dots\dots\dots (4) \\ x_3 &= x_3(\xi_1, \xi_2, \xi_3; t)\end{aligned}$$

ولنفرض الآن أنه في اللحظة المثبتة $t = c = \text{const} > 0$ ، يكون:

$$\begin{aligned}\xi_1 &= c'_1 \quad ; \quad c'_1 = \text{const} \\ \xi_2 &= c'_2 \quad ; \quad c'_2 = \text{const} \quad \dots\dots\dots (5) \\ \xi_3 &\in [a', b']\end{aligned}$$

هذا يعني أن الشكل الأولي B' للوسط المادي المستمر هو قطعة مستقيمة Γ' توازي المحور $\overrightarrow{Ox_3}$. ولمعرفة الشكل اللاغرانجي B لهذا الوسط المادي المستمر نعوض (5) في (4) آخذين بعين الاعتبار أن $t = c = \text{const} > 0$ ، فنجد:

$$\begin{aligned} x_1 &= x_1(c'_1, c'_2, \xi_3; c) = x_1(\xi_3) \\ x_2 &= x_2(c'_1, c'_2, \xi_3; c) = x_2(\xi_3) \quad ; \quad \xi_3 \in [a', b'] \quad \dots\dots (6) \\ x_3 &= x_3(c'_1, c'_2, \xi_3; c) = x_3(\xi_3) \end{aligned}$$

وبالتالي فإن الشكل اللاغرانجي B للوسط المادي المستمر هو منحني Γ معين بالعلاقات (6)، وسيطه $\xi_3 \in [a', b']$.

تمرين:

لتكن $p \equiv (x_1, x_2, x_3)$ نقطة مادية لاغرانجية من وسط مادي مستمر S . في لحظة التشوه $t > 0$ ، نفرض أن p تصبح النقطة المادية الأولرية $p' \equiv (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ حيث:

$$\left. \begin{aligned} \xi_1 &= x_1 \cos wt + x_2 \sin wt \\ \xi_2 &= -x_1 \sin wt + x_2 \cos wt \\ \xi_3 &= \frac{x_3}{1 + \sqrt{t}} \end{aligned} \right\} (*)$$

حيث $w > 0$ مقدار ثابت ومعلوم. والمطلوب ما يلي:

(1) إذا علمت أن $x_1 = c_1, x_2 = c_2, x_3 \in [a, b]$ أوجد الشكل الأولي B' لهذا الوسط في اللحظة $t = 3$.

(2) في اللحظة $t = 3$ إذا كان $\xi_1 = c'_1, \xi_2 = c'_2, \xi_3 \in [a', b']$ أوجد الشكل اللاغرانجي B لهذا الوسط المادي المستمر.

الحل:

(1) إن الشكل اللاغرانجي B هو قطعة مستقيمة توازي المحور $\overrightarrow{Ox_3}$ ، فلإيجاد الشكل الأولي B' لهذا الوسط في اللحظة $t=3$ ، نعوض

$$x_1=c_1, x_2=c_2, x_3 \in [a, b]$$

في العلاقات (*) فنجد:

$$\xi_1 = c_1 \cos 3w + c_2 \sin 3w = \text{const}$$

$$\xi_2 = -c_1 \sin 3w + c_2 \cos 3w = \text{const}$$

$$\xi_3 = \frac{x_3}{1+\sqrt{3}} = q' \in \left[\frac{a}{1+\sqrt{3}}, \frac{b}{1+\sqrt{3}} \right]$$

وبالتالي فإن الشكل الأولي B' في اللحظة $t=3$ هو قطعة مستقيمة (تختلف عن القطعة الممثلة للشكل اللاغرانجي) توازي المحور $\overrightarrow{Ox_3}$.

(2) نلاحظ أن الشكل الأولي B' للوسط في اللحظة $t=3$ ، هو قطعة مستقيمة توازي المحور $\overrightarrow{Ox_3}$ ، ولمعرفة الشكل اللاغرانجي الموافق علينا أولاً حل جملة المعادلات (*) بالنسبة للمجهول x_1, x_2, x_3 والمعالم ξ_1, ξ_2, ξ_3, t (تم حل هذا التمرين في المحاضرة السابقة)، ومن ثم نعوض في جملة الحلول الناتجة $t=3$ و $\xi_1=c'_1, \xi_2=c'_2, \xi_3 \in [a', b']$ فنحصل على المطلوب. (يترك للطالب تطبيق هذا الحل بالرموز).

انتهت المحاضرة.

بنامريخ 10 10 2010 .



جامعة البعث.

كلية العلوم.

قسم الرياضيات.

السنة الرابعة (ميكانيك).

علم المرونة

القسم النظري

المحاضرة الخامسة

رموز أينشتاين: (اتفاقية الجمع على الأدلة المكررة).

تعريف 1:

لتكن $B = \{1, 2, 3, \dots, m\}$ ، عندئذ كل تطبيق A من الشكل:

$$A : \underbrace{B \times B \times \dots \times B}_n \rightarrow \mathbb{R} \quad ; \quad (i_1, i_2, \dots, i_n) \mapsto A_{i_1 i_2 \dots i_n}$$

يدعى بمتعدد الدلائل A في B له n دليل ؛ كما ندعوا $A_{i_1 i_2 \dots i_n}$ بالحد العام لمتعدد الدلائل A .

مثال 1:

لنأخذ المصفوفة (مصفوفة الأعداد الحقيقية) $\{a_{ij}\}$ ، فإذا وضعنا $B = \{1, 2, 3\}$ ، فإن a_{ij} يعين لنا تطبيقاً معرفاً بالشكل:

$$a : B \times B \rightarrow \mathbb{R} \quad ; \quad (i, j) \mapsto a_{ij}$$

والذي يعني أن a_{ij} هو الحد العام لثنائي دلائل في $B = \{1, 2, 3\}$.

مثال 2:

لتكن $Ox_1x_2x_3$ جملة مقارنة ديكارتية قائمة، يمينية مباشرة، قاعدتها $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ ، وليكن لدينا المتجه: $\vec{a} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3 = \sum_{i=1}^3 a_i \vec{e}_i$ عندئذ فإن a_i ($i = 1, 2, 3$)، يعين لنا التطبيق:

$$a : B \rightarrow \mathbb{R} \quad ; \quad i \mapsto a_i \quad ; \quad B = \{1, 2, 3\}$$

إذاً وبحسب التعريف فإن a_i هو الحد العام لأحادي الدلائل a في B .

مثال 3:

المتتاليات (بشكل عام) هي أحاديات دلائل بالدليل n في $\mathbb{N}$ ، حيث:

$$x : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R} \quad ; \quad n \mapsto x_n$$

ملاحظة:

من الآن فصاعداً كافة الدلائل اللاتينية ستأخذ القيم 1, 2, 3 ؛ أي أن: $B = \{1, 2, 3\}$.

تعريف 2: (الدليل المكرر).

ليكن i دليلاً لاتينياً. إذا كانت لدينا عبارة رياضية أحد حدودها يحوي الدليل i مرتين، أو إذا كان أحد حدودها هو جداء مقدارين حيث يكون i موجوداً في المضروب الأول مرة، وفي المضروب الثاني مرة أخرى، عندئذٍ ندعوا i دليلاً مكرراً.

مثال 4:

في المقدار A_{ii} لدينا i هو دليل مكرر.

مثال 5:

في المقدار A_{ij} لدينا i هو دليل مكرر.

مثال 6:

في المقدار $A_i . B_i$ لدينا i هو دليل مكرر.

مثال 7:

في المقدار $A_{ij} . B_j$ لدينا j هو الدليل المكرر بينما i ليس دليلاً مكرراً.

مثال 8:

في المقدار $A_{ii} . B_j$ لدينا i هو دليل مكرر.

ملاحظة:

قد يحوي الحد الرياضي على أكثر من دليل مكرر. كما سنرى في الأمثلة التالية.

مثال 9:

في الحد $A_{jj} . B_{ss}$ ، لدينا s, j هما دليلان مكرران.

مثال 10:

في الحد $A_{ij} \cdot B_{ij}$ ، لدينا i, j هما دليلان مكرران.

مثال 11:

في المقدار A_{ijij} ، لدينا i, j هما دليلان مكرران.

مثال 12:

في المقدار $A_i \cdot B_{jj} \cdot C_i$ لدينا i, j هما دليلان مكرران.

مثال 13:

في المقدار $A_i \cdot B_j \cdot C_i \cdot D_j$ ، لدينا i, j هما دليلان مكرران.

اتفاقية الجمع على الأدلة المكررة:

إذا كان i دليلاً مكرراً، فاتفاقية الجمع بالنسبة للدليل المكرر i تقتضي إجراء الجمع على الدليل i عندما تتحول من 1 إلى 3.

مثال 14:

في المقدار A_{ii} ، لدينا i دليل مكرر، فبتطبيق اتفاقية الجمع على الدليل المكرر i ، يكون:

$$A_{ii} = A_{11} + A_{22} + A_{33}$$

مثال 15:

في الحد $A_i B_i$ لدينا i دليل مكرر، فبتطبيق اتفاقية الجمع على الدليل المكرر i ، يكون:

$$A_i B_i = A_1 B_1 + A_2 B_2 + A_3 B_3$$

خواص اتفاقية الجمع على الأدلة المكررة:**1) الخاصة الأولى: (الخاصة التجميعية).**

في حال وجود أكثر من دليل مكرر في نفس الحد، فإن تطبيق اتفاقية الجمع على الأدلة المكررة، ابتداءً من أي من هذه الأدلة يعطينا نفس النتيجة.

مثال 16:

في المقدار $A_{ij}B_{ij}$ لدينا i, j دليلين مكررين، فبتطبيق اتفاقية الجمع على الدليل المكرر i نجد:

$$A_{ij}B_{ij} = A_{1j}B_{1j} + A_{2j}B_{2j} + A_{3j}B_{3j}$$

وبتطبيق اتفاقية الجمع على الدليل المكرر j نجد:

$$A_{ij}B_{ij} = A_{i1}B_{i1} + A_{i2}B_{i2} + A_{i3}B_{i3}$$

وفي الحالتين السابقتين لو طبقنا اتفاقية الجمع على الأدلة المكررة مرة أخرى (j في الأولى و i في الثانية) فسنحصل على نفس النتيجة وهي:

$$A_{ij}B_{ij} = A_{11}B_{11} + A_{22}B_{22} + A_{33}B_{33} + A_{12}B_{12} + A_{21}B_{21} + A_{13}B_{13} + A_{31}B_{31} + A_{23}B_{23} + A_{32}B_{32}$$

ملاحظة:

كل دليل مكرر هو دليل مقيد، بينما كل دليل غير مكرر هو دليل حرّ.

مثال 17:

$$A_{ij} \begin{matrix} i \text{ دليل مكرر} \\ j \text{ دليل غير مكرر} \end{matrix} = A_{11j} + A_{22j} + A_{33j}$$

نلاحظ أن i هو دليل مكرر فهو مقيد، بينما j دليل غير مكرر فهو حرّ.

(2) الخاصة الثانية: (خاصة تصفية دلتا كرونكا δ_{ij}).

دلتا كرونكا تعرف بالشكل:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0 & ; i \neq j \\ 1 & ; i = j \end{cases}$$

وسنوضح هذه الخاصة من خلال المثال التالي:

مثال 18:

ليكن لدينا المقدار $A_{ij}\delta_{js}$ الذي فيه j هو الدليل المكرر الوحيد، عندئذٍ يمكننا أن نكتب:

$$A_{ij}\delta_{js} = A_{is}$$

ولإثبات ذلك نقوم بتطبيق اتفاقية الجمع على الدليل المكرر j فنجد:

$$A_{ij}\delta_{js} = A_{i1}\delta_{1s} + A_{i2}\delta_{2s} + A_{i3}\delta_{3s}$$

وهنا نميز الحالات الثلاث التالية:

$$s = 1 \Rightarrow A_{ij}\delta_{j1} = A_{i1} \times 1 = A_{i1}$$

$$s = 2 \Rightarrow A_{ij}\delta_{j2} = A_{i2} \times 1 = A_{i2}$$

$$s = 3 \Rightarrow A_{ij}\delta_{j3} = A_{i3} \times 1 = A_{i3}$$

مما سبق نجد:

$$\forall s = 1, 2, 3 \Rightarrow A_{ij}\delta_{js} = A_{is}$$

مثال 19:

$$A_{ij}\delta_{\ell i} = A_{\ell j}$$

انتهت المحاضرة.

بنامريخ 12 10 2010 .



جامعة البعث.

كلية العلوم.

قسم الرياضيات.

السنة الرابعة (ميكانيك).

علم المرونة

القسم النظري

المحاضرة السادسة

الخاصة الثالثة: (من خواص اتفاقية الجمع على الأدلة المكررة).

في اتفاقية الجمع على الأدلة المكررة يكون الضرب تبديلياً.

مثال 1:

$$A_i B_i = B_i A_i$$

الخاصة الرابعة:

في اتفاقية الجمع على الأدلة المكررة لدينا الضرب توزيعي على الجمع:

مثال 2:

$$A_{ij} \left(\overbrace{B_{ij} + C_{ij}}^{D_{ij}} \right) = A_{ij} B_{ij} + A_{ij} C_{ij}$$

ملاحظة هامة:

تبقى اتفاقية الجمع على الأدلة المكررة صحيحة حتى ولو كانت عملية الضرب ليست العملية المألوفة.

مثال 3:

$$A_i \overrightarrow{B_i} = A_1 \overrightarrow{B_1} + A_2 \overrightarrow{B_2} + A_3 \overrightarrow{B_3}$$

مثال 4:

$$\overrightarrow{A_i} \cdot \overrightarrow{B_i} = \overrightarrow{A_1} \cdot \overrightarrow{B_1} + \overrightarrow{A_2} \cdot \overrightarrow{B_2} + \overrightarrow{A_3} \cdot \overrightarrow{B_3}$$

مثال 5:

$$\overrightarrow{A_i} \wedge \overrightarrow{B_i} = \overrightarrow{A_1} \wedge \overrightarrow{B_1} + \overrightarrow{A_2} \wedge \overrightarrow{B_2} + \overrightarrow{A_3} \wedge \overrightarrow{B_3}$$

تمرين 1:

أثبت أن:

$$A_{ij} \delta_{ij} = A_{kk}$$

الحل:

لدينا:

 i دليل مكرر

$$A_{ij} \delta_{ij} = A_{1j} \delta_{1j} + A_{2j} \delta_{2j} + A_{3j} \delta_{3j}$$

بتطبيق خاصية تصفية دلتا كرونك على كل حد من الحدود:

$$= A_{11} + A_{22} + A_{33} = A_{kk}$$

انتهت المحاضرة.

بناريخ 14 10 2010 .



جامعة البعث.

كلية العلوم.

قسم الرياضيات.

السنة الرابعة (ميكانيك).

علم المرونة

القسم النظري

المحاضرة السابعة

ملاحظة 1:

إذا كان S وسطاً مادياً مستمراً، وكانت P, Q نقطتان ماديتان لاغرانجيتان من S قريبتان من بعضهما، فإن النقطتان الماديتان الأوليتان P', Q' الموافقتان لهما في اللحظة $t > 0$ ، تكونان قريبتان من بعضهما أيضاً.

ملاحظة 2:

لتكن $P \equiv (x_1, x_2, x_3) \in B$ نقطة مادية لاغرانجية، من الوسط المادي المستمر S . في اللحظة $t > 0$ فإن النقطة المادية P تصبح النقطة المادية الأولرية $P' \equiv (\xi_1, \xi_2, \xi_3) \in B'$ وقد وجدنا سابقاً أن:

$$\xi_1 = \xi_1(x_1, x_2, x_3; t)$$

$$\xi_2 = \xi_2(x_1, x_2, x_3; t)$$

$$\xi_3 = \xi_3(x_1, x_2, x_3; t)$$

وهذا يكافئ قولنا:

$$\xi_i = \xi_i(x_1, x_2, x_3; t) \quad ; \quad i = 1, 2, 3 \quad \dots\dots\dots (1)$$

في الأوساط المستمرة نفرض أن الدوال:

$$\xi_i : B \rightarrow \mathbb{R} \quad ; \quad P \mapsto \xi_i(P; t)$$

تكون من الصف C^1 في B .

وفي الأوساط المستمرة فإن المعين اليعقوبي التالي لا يكون معدوماً:

$$\frac{D(\xi_1, \xi_2, \xi_3)}{D(x_1, x_2, x_3)}(P; t) = \begin{vmatrix} \frac{\partial \xi_1}{\partial x_1}(P; t) & \frac{\partial \xi_1}{\partial x_2}(P; t) & \frac{\partial \xi_1}{\partial x_3}(P; t) \\ \frac{\partial \xi_2}{\partial x_1}(P; t) & \frac{\partial \xi_2}{\partial x_2}(P; t) & \frac{\partial \xi_2}{\partial x_3}(P; t) \\ \frac{\partial \xi_3}{\partial x_1}(P; t) & \frac{\partial \xi_3}{\partial x_2}(P; t) & \frac{\partial \xi_3}{\partial x_3}(P; t) \end{vmatrix} \neq 0$$

وذلك: $\forall P \in B \quad \wedge \quad \forall t > 0$.

مصفوفة الانفعالات اللاغرانجية لوسط مادي مستمر:

لتكن $Ox_1x_2x_3$ جملة إحداثيات ديكارتية، قائمة، يمينية، مباشرة وقاعدتها $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ ، وعطالية. وليكن S وسطاً مادياً مستمراً. لتكن $P \equiv (x_1, x_2, x_3) \in B$ نقطة مادية لاغرانجية من هذا الوسط.

في لحظة التشوه $t > 0$ فإن P تصبح النقطة المادية الأولرية: $P' \equiv (\xi_1, \xi_2, \xi_3) \in B'$. وجدنا منذ قليل أن:

$$\xi_i = \xi_i(x_1, x_2, x_3; t) \quad ; \quad i = 1, 2, 3 \quad \dots\dots (1)$$

ولنضع الآن:

$$\begin{aligned} A_{jk}(P; t) &= \frac{\partial \xi_i}{\partial x_j}(P; t) \cdot \frac{\partial \xi_i}{\partial x_k}(P; t) \\ &= \frac{\partial \xi_1}{\partial x_j}(P; t) \cdot \frac{\partial \xi_1}{\partial x_k}(P; t) + \frac{\partial \xi_2}{\partial x_j}(P; t) \cdot \frac{\partial \xi_2}{\partial x_k}(P; t) \\ &\quad + \frac{\partial \xi_3}{\partial x_j}(P; t) \cdot \frac{\partial \xi_3}{\partial x_k}(P; t) \end{aligned}$$

عندئذٍ نسمي مصفوفة التوابع اللاغرانجية: $\{e_{jk}(P; t)\}_{3 \times 3}$ ، والتي حدها العام يعطى بـ:

$$e_{jk}(P; t) := \frac{1}{2} [A_{jk}(P; t) - \delta_{jk}]$$

بمصفوفة الانفعالات اللاغرانجية للوسط المادي المستمر، والمتعلقة بالجملة $Ox_1x_2x_3$ ، والمعينة بدلالة المشتقات الجزئية لـ $\xi_i(P; t)$ بالنسبة لـ x_j .

نتيجة 1:

إن مصفوفة الانفعالات اللاغرانجية $\{e_{jk}(P; t)\}_{3 \times 3}$ هي مصفوفة متناظرة.

الإثبات:

لدينا:

$$e_{kj}(P; t) := \frac{1}{2} [A_{kj}(P; t) - \delta_{kj}] = \frac{1}{2} [A_{kj}(P; t) - \delta_{jk}] \quad \dots\dots (2)$$

ولكن:

$$\begin{aligned} A_{kj}(P; t) &= \frac{\partial \xi_i}{\partial x_k}(P; t) \cdot \frac{\partial \xi_i}{\partial x_j}(P; t) \\ &= \frac{\partial \xi_i}{\partial x_j}(P; t) \cdot \frac{\partial \xi_i}{\partial x_k}(P; t) = A_{jk}(P; t) \end{aligned}$$

وبالتعويض في العلاقة (2) نجد:

$$e_{kj}(P; t) := \frac{1}{2} [A_{jk}(P; t) - \delta_{jk}] = e_{jk}(P; t)$$

. وذلك: $\forall t > 0, \forall P \in B, \forall j, k = 1, 2, 3$ وبالتالي المصفوفة $\{e_{jk}(P; t)\}_{3 \times 3}$ متناظرة.

مصفوفة الانفعالات اللاغرانجية $\{e_{jk}(P; t)\}_{3 \times 3}$ ، محسوبة بدلالة المشتقات الجزئية

لـ $u_i(P; t)$ بالنسبة لـ x_j .

وجدنا سابقاً أن المركبات الديكارتية اللاغرانجية لمتجه الإزاحة $\vec{u}$ تعطى بـ:

$$u_1(x_1, x_2, x_3; t) = \xi_1(x_1, x_2, x_3; t) - x_1$$

$$u_2(x_1, x_2, x_3; t) = \xi_2(x_1, x_2, x_3; t) - x_2$$

$$u_3(x_1, x_2, x_3; t) = \xi_3(x_1, x_2, x_3; t) - x_3$$

وهذا يكافئ قولنا:

$$u_i(P; t) = \xi_i(P; t) - x_i \quad ; \quad i = 1, 2, 3 \quad \dots\dots\dots (3)$$

كما وجدنا منذ قليل:

$$e_{jk}(P; t) := \frac{1}{2} \left[\overbrace{\frac{\partial \xi_i}{\partial x_j}(P; t) \cdot \frac{\partial \xi_i}{\partial x_k}(P; t)}^{A_{jk}(P; t)} - \delta_{jk} \right] \quad ; \quad j, k = 1, 2, 3 \quad \dots\dots\dots (4)$$

وللحصول على المطلوب علينا أن نحسب: $\frac{\partial \xi_i}{\partial x_j}(P; t)$, $\frac{\partial \xi_i}{\partial x_k}(P; t)$

من (3) نجد:

$$\xi_i(P; t) = u_i(P; t) + x_i$$

نشتق طرفي العلاقة الأخيرة، جزئياً بالنسبة لـ x_j ، فنجد:

$$\frac{\partial \xi_i}{\partial x_j}(P; t) = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}(P; t) + \frac{\partial x_i}{\partial x_j}$$

ولكن:

$$\frac{\partial x_i}{\partial x_j} = \begin{cases} 1; i = j \\ 0; i \neq j \end{cases} = \delta_{ij}$$

بالتعويض نجد:

$$\frac{\partial \xi_i}{\partial x_j}(P; t) = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}(P; t) + \delta_{ij} \quad \dots\dots\dots (5)$$

وبنفس الطريقة، بالاشتقاق الجزئي بالنسبة لـ x_k ، نجد:

$$\frac{\partial \xi_i}{\partial x_k}(P; t) = \frac{\partial u_i}{\partial x_k}(P; t) + \delta_{ik} \quad \dots\dots\dots (6)$$

والآن للحصول على المطلوب نعوض (5)، (6) في (4) فنجد:

$$\begin{aligned}
e_{jk}(P; t) &= \frac{1}{2} \left\{ \left[\frac{\partial u_i}{\partial x_j}(P; t) + \delta_{ij} \right] \cdot \left[\frac{\partial u_i}{\partial x_k}(P; t) + \delta_{ik} \right] - \delta_{jk} \right\} \\
&= \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial u_i}{\partial x_j}(P; t) \cdot \frac{\partial u_i}{\partial x_k}(P; t) + \frac{\partial u_i}{\partial x_j}(P; t) \cdot \delta_{ik} + \frac{\partial u_i}{\partial x_k}(P; t) \cdot \delta_{ij} + \delta_{ij} \delta_{ik} - \delta_{jk} \right\} \\
&= \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial u_i}{\partial x_j}(P; t) \cdot \frac{\partial u_i}{\partial x_k}(P; t) + \frac{\partial u_k}{\partial x_j}(P; t) + \frac{\partial u_j}{\partial x_k}(P; t) \right\} \\
\Rightarrow e_{jk}(P; t) &= \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u_j}{\partial x_k}(P; t) + \frac{\partial u_k}{\partial x_j}(P; t) + \frac{\partial u_i}{\partial x_j}(P; t) \cdot \frac{\partial u_i}{\partial x_k}(P; t) \right] \dots\dots\dots (7)
\end{aligned}$$

ندعو المصفوفة $\{e_{jk}(P; t)\}_{3 \times 3}$ ، والتي حدها العام $e_{jk}(P; t)$ يعطى بالعلاقة (7)،
بمصفوفة الانفعالات اللاغرانجية المرتبطة بالجملة $Ox_1x_2x_3$ ، والمعينة بدلالة
المشتقات الجزئية لـ $u_i(P; t)$ بالنسبة لـ x_j .

انتهت المحاضرة.

بناربيغ 17 10 2010 .



جامعة البعث.

كلية العلوم.

قسم الرياضيات.

السنة الرابعة (ميكانيك).

علم المرونة

القسم النظري

المحاضرة الثامنة

نتيجة 1:

إذا كانت $\{e_{jk}(P;t)\}_{3 \times 3}$ مصفوفة الانفعالات اللاغرانجية للوسط المادي المستمر S ، والمتعلقة بالجملة $Ox_1x_2x_3$ ، فإنه عندئذ يكون:

$$\left. \begin{array}{l} 1+2e_{11}(P;t) > 0 \\ 1+2e_{22}(P;t) > 0 \\ 1+2e_{33}(P;t) > 0 \end{array} \right\} \forall P \in B \wedge \forall t > 0$$

البرهان:

وجدنا سابقاً أن المعين اليعقوبي للدوال ξ_1, ξ_2, ξ_3 بالنسبة لـ x_3, x_2, x_1 هو:

$$\frac{D(\xi_1, \xi_2, \xi_3)}{D(x_1, x_2, x_3)}(P;t) = \begin{vmatrix} \frac{\partial \xi_1}{\partial x_1}(P;t) & \frac{\partial \xi_1}{\partial x_2}(P;t) & \frac{\partial \xi_1}{\partial x_3}(P;t) \\ \frac{\partial \xi_2}{\partial x_1}(P;t) & \frac{\partial \xi_2}{\partial x_2}(P;t) & \frac{\partial \xi_2}{\partial x_3}(P;t) \\ \frac{\partial \xi_3}{\partial x_1}(P;t) & \frac{\partial \xi_3}{\partial x_2}(P;t) & \frac{\partial \xi_3}{\partial x_3}(P;t) \end{vmatrix} \neq 0 ;$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall P \in B \\ \forall t > 0 \end{array} \right.$$

ينتج عن ذلك أن:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \xi_1}{\partial x_1}(P;t) \\ \frac{\partial \xi_2}{\partial x_1}(P;t) \\ \frac{\partial \xi_3}{\partial x_1}(P;t) \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} ; \quad \left\{ \begin{array}{l} \forall P \in B \\ \forall t > 0 \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial \xi_1}{\partial x_1}(P;t) \cdot \frac{\partial \xi_1}{\partial x_1}(P;t) + \frac{\partial \xi_2}{\partial x_1}(P;t) \cdot \frac{\partial \xi_2}{\partial x_1}(P;t) + \frac{\partial \xi_3}{\partial x_1}(P;t) \cdot \frac{\partial \xi_3}{\partial x_1}(P;t) > 0 \quad ; \quad \forall P \in B \wedge \forall t > 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial \xi_i}{\partial x_1}(P;t) \cdot \frac{\partial \xi_i}{\partial x_1}(P;t) > 0 \quad ; \quad \forall P \in B \wedge \forall t > 0.$$

$$\Leftrightarrow A_{11}(P;t) > 0 \quad ; \quad \forall P \in B \wedge \forall t > 0.$$

وبنفس الطريقة من أجل العمودين الثاني والثالث من المعين اليعقوبي نجد أنه:

$$A_{22}(P;t) > 0 \quad ; \quad \forall P \in B \wedge \forall t > 0.$$

$$A_{33}(P;t) > 0 \quad ; \quad \forall P \in B \wedge \forall t > 0.$$

هذا من جهة، ومن جهة أخرى لدينا:

$$e_{jk}(P;t) = \frac{1}{2} [A_{jk}(P;t) - \delta_{jk}] \quad ; \quad \begin{cases} j=1, 2, 3 \\ k=1, 2, 3 \end{cases}$$

ومنه:

$$\left. \begin{aligned} j=1, k=1 &\Rightarrow e_{11}(P;t) = \frac{1}{2} [A_{11}(P;t) - 1] \\ &\Leftrightarrow A_{11}(P;t) = 1 + 2e_{11}(P;t) > 0 \\ j=2, k=2 &\Rightarrow e_{22}(P;t) = \frac{1}{2} [A_{22}(P;t) - 1] \\ &\Leftrightarrow A_{22}(P;t) = 1 + 2e_{22}(P;t) > 0 \\ j=3, k=3 &\Rightarrow e_{33}(P;t) = \frac{1}{2} [A_{33}(P;t) - 1] \\ &\Leftrightarrow A_{33}(P;t) = 1 + 2e_{33}(P;t) > 0 \end{aligned} \right\} \begin{cases} \forall P \in B \\ \forall t > 0 \end{cases}$$

وهو المطلوب.

مصفوفة الانفعالات الأولرية لوسط مادي مستمر:

لتكن $Ox_1x_2x_3$ جملة إحداثيات ديكارتية، قائمة، يمينية، مباشرة وقاعدتها $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ ، وعطالية. وليكن S وسطاً مادياً مستمراً، شكله اللاغرانجي هو B ، وشكله الأولري في اللحظة $t > 0$ هو B' .

ولتكن $P \equiv (x_1, x_2, x_3) \in B$ نقطة مادية لاغرانجية من هذا الوسط، ولنفرض أن النقطة المادية الأولرية الموافقة لها في اللحظة $t > 0$ هي $P' \equiv (\xi_1, \xi_2, \xi_3) \in B'$ وجدنا سابقاً أن:

$$\left. \begin{aligned} \xi_1 &= \xi_1(x_1, x_2, x_3; t) \\ \xi_2 &= \xi_2(x_1, x_2, x_3; t) \\ \xi_3 &= \xi_3(x_1, x_2, x_3; t) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (1)$$

بحل جملة المعادلات (1) بالنسبة للمجاهيل x_3, x_2, x_1 نجد:

$$\begin{aligned} x_1 &= x_1(\xi_1, \xi_2, \xi_3; t) \\ x_2 &= x_2(\xi_1, \xi_2, \xi_3; t) \\ x_3 &= x_3(\xi_1, \xi_2, \xi_3; t) \end{aligned}$$

أو:

$$x_i = x_i(P'; t) ; i = 1, 2, 3 \dots\dots\dots (2)$$

ولنضع الآن:

$$\begin{aligned} B_{jk}(P'; t) &= \frac{\partial x_i}{\partial \xi_j}(P'; t) \cdot \frac{\partial x_i}{\partial \xi_k}(P'; t) \\ &= \frac{\partial x_1}{\partial \xi_j}(P'; t) \cdot \frac{\partial x_1}{\partial \xi_k}(P'; t) + \frac{\partial x_2}{\partial \xi_j}(P'; t) \cdot \frac{\partial x_2}{\partial \xi_k}(P'; t) \\ &\quad + \frac{\partial x_3}{\partial \xi_j}(P'; t) \cdot \frac{\partial x_3}{\partial \xi_k}(P'; t) \end{aligned}$$

حيث: $j, k = 1, 2, 3$.

عندئذٍ نسمي مصفوفة التوابع الأولرية: $\{\eta_{jk}(P'; t)\}_{3 \times 3}$ ، والتي حدها العام يعطى بـ:

$$\eta_{jk}(P'; t) := \frac{1}{2} [\delta_{jk} - B_{jk}(P'; t)] ; j, k = 1, 2, 3.$$

بمصفوفة الانفعالات الأولرية للوسط المادي المستمر S ، والمتعلقة بالجملة $Ox_1x_2x_3$ ، والمعينة بدلالة المشتقات الجزئية لـ $x_i(P'; t)$ بالنسبة لـ ξ_j .

نتيجة 2:

واضح أن مصفوفة الانفعالات الأولرية $\{\eta_{jk}(P'; t)\}_{3 \times 3}$ ، هي مصفوفة متناظرة.

مصفوفة الانفعالات الأولرية $\{\eta_{jk}(P'; t)\}_{3 \times 3}$ ، محسوبة بدلالة المشتقات الجزئية $u_i(P'; t)$ بالنسبة لـ ξ_j .

كما وجدنا سابقاً أن المركبات الديكارتية الأولرية لمتجه الإزاحة $\vec{u}$ تعطى بـ:

$$u_1(\xi_1, \xi_2, \xi_3; t) = \xi_1 - x_1(\xi_1, \xi_2, \xi_3; t)$$

$$u_2(\xi_1, \xi_2, \xi_3; t) = \xi_2 - x_2(\xi_1, \xi_2, \xi_3; t)$$

$$u_3(\xi_1, \xi_2, \xi_3; t) = \xi_3 - x_3(\xi_1, \xi_2, \xi_3; t)$$

وهذا يكافئ قولنا:

$$u_i(P'; t) = \xi_i - x_i(P'; t) \quad ; \quad i = 1, 2, 3 \quad \dots (*)$$

كما وجدنا منذ قليل:

$$\eta_{jk}(P'; t) := \frac{1}{2} \left[\delta_{jk} - \overbrace{\frac{\partial x_i}{\partial \xi_j}(P'; t) \cdot \frac{\partial x_i}{\partial \xi_k}(P'; t)}^{B_{jk}(P'; t)} \right] ; j, k = 1, 2, 3 \quad \dots (3)$$

وللحصول على المطلوب علينا أن نحسب: $\frac{\partial x_i}{\partial \xi_j}(P'; t)$ ، $\frac{\partial x_i}{\partial \xi_k}(P'; t)$

من (*) نجد:

$$x_i(P'; t) = \xi_i - u_i(P'; t) \quad ; \quad i = 1, 2, 3 \quad \dots (4)$$

نشتق طرفي العلاقة الأخيرة (4)، جزئياً بالنسبة لـ ξ_j ، فنجد:

$$\frac{\partial x_i}{\partial \xi_j}(P'; t) = \underbrace{\delta_{ij}}_{\frac{\partial \xi_i}{\partial \xi_j}} - \frac{\partial u_i}{\partial \xi_j}(P'; t) \quad \dots (5)$$

وبنفس الطريقة، بالاستقاق الجزئي بالنسبة لـ ξ_k ، نجد:

$$\frac{\partial x_i}{\partial \xi_k}(P'; t) = \delta_{ik} - \frac{\partial u_i}{\partial \xi_k}(P'; t) \quad \dots\dots (6)$$

والآن للحصول على المطلوب نعوض (5) , (6) في (3) فنجد:

$$\begin{aligned} \eta_{jk}(P'; t) &= \frac{1}{2} \left\{ \delta_{jk} - \left[\delta_{ij} - \frac{\partial u_i}{\partial \xi_j}(P'; t) \right] \cdot \left[\delta_{ik} - \frac{\partial u_i}{\partial \xi_k}(P'; t) \right] \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \delta_{jk} - \delta_{ij} \delta_{ik} + \frac{\partial u_i}{\partial \xi_k}(P'; t) \cdot \delta_{ij} + \frac{\partial u_i}{\partial \xi_j}(P'; t) \cdot \delta_{ik} - \frac{\partial u_i}{\partial \xi_j}(P'; t) \cdot \frac{\partial u_i}{\partial \xi_k}(P'; t) \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial u_j}{\partial \xi_k}(P'; t) + \frac{\partial u_k}{\partial \xi_j}(P'; t) - \frac{\partial u_i}{\partial \xi_j}(P'; t) \cdot \frac{\partial u_i}{\partial \xi_k}(P'; t) \right\} \\ \Rightarrow \eta_{jk}(P'; t) &= \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u_j}{\partial \xi_k}(P'; t) + \frac{\partial u_k}{\partial \xi_j}(P'; t) - \frac{\partial u_i}{\partial \xi_j}(P'; t) \cdot \frac{\partial u_i}{\partial \xi_k}(P'; t) \right] \quad \dots\dots (7) \end{aligned}$$

ندعو المصفوفة $\{e_{jk}(P; t)\}_{3 \times 3}$ والتي حدها العام $e_{jk}(P; t)$ يعطى بالعلاقة (7)،
بمصفوفة الانفعالات الأولرية المرتبطة بالجملة $Ox_1x_2x_3$ ، والمعينة بدلالة المشتقات الجزئية
لـ $u_i(P'; t)$ بالنسبة لـ ξ_j .

انتهت المحاضرة.

بنامريخ 19 10 2010 .



جامعة البعث.

كلية العلوم.

قسم الرياضيات.

السنة الرابعة (ميكانيك).

علم المرونة

القسم النظري

المحاضرة التاسعة

تذكرة:

نقول عن المصفوفة $A = \{a_{ij}\}_{3 \times 3}$ أنها مصفوفة متناظرة إذا وفقط إذا تحقق:

$$a_{ij} = a_{ji} \quad ; \quad \forall i = 1, 2, 3 \quad ; \quad \forall j = 1, 2, 3$$

ونقول عن المصفوفة A أنها متناظرة عكسياً، إذا وفقط إذا تحقق:

$$a_{ij} = -a_{ji} \quad ; \quad \forall i = 1, 2, 3 \quad ; \quad \forall j = 1, 2, 3$$

نتيجة:

عناصر القطر الرئيسي للمصفوفة المتناظرة عكسياً تكون كلها أصفار؛ أي أن:

$$a_{11} = a_{22} = a_{33} = 0$$

تمرين 1:

لتكن $A = \{a_{ij}\}_{3 \times 3}$ مصفوفة متناظرة، ولتكن $B = \{B_{ij}\}_{3 \times 3}$ مصفوفة متناظرة عكسياً. عندئذٍ أثبت أن:

$$a_{ij} \cdot b_{ij} = 0$$

الحل:

$$\begin{aligned} a_{ij} \cdot b_{ij} &= a_{1j}b_{1j} + a_{2j}b_{2j} + a_{3j}b_{3j} \\ &= a_{11}b_{11} + a_{12}b_{12} + a_{13}b_{13} + a_{21}b_{21} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{23} \\ &\quad + a_{31}b_{31} + a_{32}b_{32} + a_{33}b_{33} \end{aligned}$$

ولما كان:

$$b_{11} = b_{22} = b_{33} = 0, \quad b_{12} = -b_{21}, \quad b_{13} = -b_{31}, \quad b_{23} = -b_{32}$$

$$a_{ij} = a_{ji} \quad ; \quad \forall i = 1, 2, 3 \quad ; \quad \forall j = 1, 2, 3 \quad \Leftrightarrow \quad a_{12} = a_{21}, \quad a_{13} = a_{31}, \quad a_{23} = a_{32}$$

فإنه عندئذٍ نكتب -استناداً لذلك- المساواة السابقة بالشكل:

$$a_{ij} b_{ij} = a_{12} (b_{12} + b_{21}) + a_{13} (b_{13} + b_{31}) + a_{23} (b_{23} + b_{32}) = 0$$

وهو المطلوب.

تعريف: (الجزء التناظري والجزء التناظري العكسي لمصفوفة).

لتكن $A = \{a_{ij}\}_{3 \times 3}$ مصفوفة أعداد حقيقية من المرتبة 3. عندئذ:

أ) نسمي:

$$a_{(ij)} := \frac{1}{2} (a_{ij} + a_{ji})$$

بالجزء التناظري للمصفوفة A .

ب) نسمي:

$$a_{[ij]} := \frac{1}{2} (a_{ij} - a_{ji})$$

بالجزء التناظري العكسي للمصفوفة A .

نتيجة:

$$a_{ij} = a_{(ij)} + a_{[ij]} \quad ; \quad \forall i = 1, 2, 3 \quad ; \quad \forall j = 1, 2, 3$$

لإثبات ذلك نعوض عن $a_{(ij)}$, $a_{[ij]}$ بما يساويهما من التعريف السابق، فنجد:

$$\begin{aligned} a_{(ij)} + a_{[ij]} &= \frac{1}{2} (a_{ij} + a_{ji}) + \frac{1}{2} (a_{ij} - a_{ji}) \\ &= \frac{1}{2} (a_{ij} + a_{ji} + a_{ij} - a_{ji}) = \frac{1}{2} (2a_{ij}) = a_{ij} \end{aligned}$$

تمرين 2:

لتكن $A = \{a_{ij}\}_{3 \times 3}$ و $B = \{b_{ij}\}_{3 \times 3}$ مصفوفتا أعداد حقيقية من المرتبة 3.

عندئذ أثبت أن:

$$a_{ij} b_{ij} = a_{(ij)} b_{(ij)} + a_{[ij]} b_{[ij]}$$

الحل:

$$\begin{aligned}
 \left. \begin{aligned} a_{ij} &= a_{(ij)} + a_{[ij]} \\ b_{ij} &= b_{(ij)} + b_{[ij]} \end{aligned} \right\} \Rightarrow a_{ij} b_{ij} &= \left(a_{(ij)} + a_{[ij]} \right) \left(b_{(ij)} + b_{[ij]} \right) \\
 &= a_{(ij)} b_{(ij)} + \underbrace{a_{(ij)} b_{[ij]}}_0 + \underbrace{a_{[ij]} b_{(ij)}}_0 + a_{[ij]} b_{[ij]} \\
 &= a_{(ij)} b_{(ij)} + a_{[ij]} b_{[ij]}
 \end{aligned}$$

انتهت المحاضرة.

بنامريغ 21 10 2010 .



جامعة البعث.

كلية العلوم.

قسم الرياضيات.

السنة الرابعة (ميكانيك).

علم المرونة

القسم النظري

المحاضرة العاشرة

العنصر الخطي اللاغرانجي، والعنصر الخطي الأولري، من وسط مادي مستمر:

لتكن $Ox_1x_2x_3$ جملة إحداثية ديكارتية قائمة، يمينية ومباشرة، قاعدتها $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ وعطالية ؛ وليكن لدينا وسطاً مادياً مستمراً S . نفرض أن الشكل اللاغرانجي للوسط S هو B ، والشكل الأولري للوسط في اللحظة $t > 0$ هو B' . ولتكن $p \equiv (x_1, x_2, x_3) \in B$ و $Q \equiv (x_1 + dx_1, x_2 + dx_2, x_3 + dx_3) \in B$ نقطتان ماديتان لاغرانجيتان قريبتان من بعضهما.

في لحظة التشوه $t > 0$ تصبح النقطة المادية p ، النقطة المادية الأولرية: $p' \equiv (\xi_1, \xi_2, \xi_3) \in B'$ ، وتصبح النقطة المادية Q ، النقطة الأولرية: $Q' \equiv (\xi_1 + d\xi_1, \xi_2 + d\xi_2, \xi_3 + d\xi_3) \in B'$ وذلك بسبب استمرارية الوسط S .

تعريف 1:

نسمي المتجه: $\vec{dS}_0 := \vec{pQ} = dx_1 \vec{e}_1 + dx_2 \vec{e}_2 + dx_3 \vec{e}_3 = dx_i \vec{e}_i$ عنصراً خطياً لاغرانجياً من الوسط المادي المستمر S ، وبدايته النقطة المادية اللاغرانجية p .

تعريف 2:

نسمي المتجه: $\vec{dS} := \vec{p'Q'} = d\xi_1 \vec{e}_1 + d\xi_2 \vec{e}_2 + d\xi_3 \vec{e}_3 = d\xi_i \vec{e}_i$ عنصراً خطياً أولرياً من الوسط المادي المستمر S في اللحظة $t > 0$ ، وبدايته النقطة المادية الأولرية p' .

تعريف: (التغير النسبي لطول العنصر الخطي اللاغرانجي).

لنرمز بـ $dS_0 = |\vec{dS}_0|$ و $dS = |\vec{dS}|$ عندئذٍ نسمي المقدار الحقيقي:

$$\lambda_{pQ} := \frac{dS - dS_0}{dS_0}$$

بالتغير النسبي لطول العنصر الخطي اللاغرانجي dS_0 ، في اللحظة $t > 0$. ونميز الحالات الثلاث التالية:

(1) $\lambda_{pQ} > 0$ نقول عندئذٍ أنه لدينا تمدد نسبي لطول العنصر الخطي dS_0 في اللحظة $t > 0$.

(2) $\lambda_{pQ} < 0$ نقول عندئذٍ أنه لدينا تقلص نسبي لطول العنصر الخطي dS_0 في اللحظة $t > 0$.

(3) $\lambda_{pQ} = 0$ نقول عندئذٍ أنه لدينا محافظة على طول العنصر الخطي dS_0 في اللحظة $t > 0$.

لنكتب الآن:

$$\lambda_{pQ} := \frac{dS - dS_0}{dS_0} = \frac{dS}{dS_0} - 1 \quad \dots\dots\dots (1)$$

نتيجة 1:

$$-1 < \lambda_{pQ} ; \forall p, Q \in B , \forall t > 0$$

البرهان:

لنفرض جدلاً أن: $\lambda_{pQ} \geq -1$ ، فبالتالي:

$$\lambda_{pQ} = \frac{dS}{dS_0} - 1 \leq -1 \Rightarrow \frac{dS}{dS_0} \leq 0$$

وهذا كلام غير مقبول، وبالتالي فرضنا الجدلي خاطئ، وعكسه هو الصحيح، أي:

$$-1 < \lambda_{pQ} ; \forall p, Q \in B , \forall t > 0$$

مبرهنة:

$$(dS)^2 - (dS_0)^2 = 2e_{jk}(p; t) dx_j dx_k \quad (1)$$

$$(dS)^2 - (dS_0)^2 = 2\eta_{jk}(p'; t) d\xi_j d\xi_k \quad (2)$$

البرهان:

وجدنا سابقاً أن:

$$\xi_i = \xi_i(p; t) ; i = 1, 2, 3.$$

فإذا اعتبرنا $t > 0$ ثابتاً فيصبح لدينا:

$$\xi_i = \xi_i(p) ; i = 1, 2, 3.$$

وبالتالي:

$$\left. \begin{aligned} d\xi_i(p;t) &= \frac{\partial \xi_i}{\partial x_1}(p;t)dx_1 + \frac{\partial \xi_i}{\partial x_2}(p;t)dx_2 + \frac{\partial \xi_i}{\partial x_3}(p;t)dx_3 \\ &= \frac{\partial \xi_i}{\partial x_j}(p;t)dx_j = \frac{\partial \xi_i}{\partial x_k}(p;t)dx_k \quad ; \quad i=1,2,3 \end{aligned} \right\} \dots\dots (3)$$

هذا من جهة أولى، ومن جهة أخرى:

$$(dS_0)^2 = (dx_1)^2 + (dx_2)^2 + (dx_3)^2 = dx_i dx_i = \delta_{jk} dx_j dx_k$$

$$(dS)^2 = (d\xi_1)^2 + (d\xi_2)^2 + (d\xi_3)^2 = d\xi_i d\xi_i$$

$$= \left[\frac{\partial \xi_i}{\partial x_j}(p;t) dx_j \right] \cdot \left[\frac{\partial \xi_i}{\partial x_k}(p;t) dx_k \right]$$

$$= \left[\frac{\partial \xi_i}{\partial x_j}(p;t) \cdot \frac{\partial \xi_i}{\partial x_k}(p;t) \right] dx_j dx_k = A_{jk}(p;t) \cdot dx_j dx_k$$

عندئذٍ بتعويض ما سبق في الفرق $(dS)^2 - (dS_0)^2$ ، نجد:

$$(dS)^2 - (dS_0)^2 = A_{jk}(p;t) \cdot dx_j dx_k - \delta_{jk} \cdot dx_j dx_k$$

$$= [A_{jk}(p;t) - \delta_{jk}] dx_j dx_k \quad \dots\dots\dots (4)$$

وبما أن:

$$e_{jk}(p;t) = \frac{1}{2} [A_{jk}(p;t) - \delta_{jk}] \Leftrightarrow [A_{jk}(p;t) - \delta_{jk}] = 2e_{jk}(p;t)$$

فبالتعويض في (4) نجد:

$$(dS)^2 - (dS_0)^2 = 2e_{jk}(p;t) dx_j dx_k$$

وهو المطلوب الأول. ولنبرهن المطلوب الثاني.

وجدنا سابقاً أن:

$$x_i = x_i(p';t) \quad ; \quad i=1, 2, 3.$$

فإذا اعتبرنا $t > 0$ ثابتاً فيصبح لدينا:

$$x_i = x_i(p') \quad ; \quad i=1, 2, 3.$$

وبالتالي:

$$\left. \begin{aligned} dx_i(p';t) &= \frac{\partial x_i}{\partial \xi_1}(p';t)d\xi_1 + \frac{\partial x_i}{\partial \xi_2}(p';t)d\xi_2 + \frac{\partial x_i}{\partial \xi_3}(p';t)d\xi_3 \\ &= \frac{\partial x_i}{\partial \xi_j}(p';t)d\xi_j = \frac{\partial x_i}{\partial \xi_k}(p';t)d\xi_k \quad ; \quad i=1,2,3 \end{aligned} \right\} \dots\dots (5)$$

هذا من جهة أولى، ومن جهة أخرى:

$$\begin{aligned} (dS_0)^2 &= dx_1 dx_1 + dx_2 dx_2 + dx_3 dx_3 = dx_i dx_i \\ &= \left[\frac{\partial x_i}{\partial \xi_j}(p';t) d\xi_j \right] \cdot \left[\frac{\partial x_i}{\partial \xi_k}(p';t) d\xi_k \right] \\ &= \left[\frac{\partial x_i}{\partial \xi_j}(p';t) \cdot \frac{\partial x_i}{\partial \xi_k}(p';t) \right] d\xi_j d\xi_k = B_{jk}(p';t) \cdot d\xi_j d\xi_k , \\ (dS)^2 &= (d\xi_1)^2 + (d\xi_2)^2 + (d\xi_3)^2 = d\xi_i d\xi_i = \delta_{jk} d\xi_j d\xi_k \end{aligned}$$

عندئذ بتعويض ما سبق في الفرق $(dS)^2 - (dS_0)^2$ ، نجد:

$$\begin{aligned} (dS)^2 - (dS_0)^2 &= \delta_{jk} \cdot d\xi_j d\xi_k - B_{jk}(p';t) \cdot d\xi_j d\xi_k \\ &= [\delta_{jk} - B_{jk}(p';t)] d\xi_j d\xi_k \quad \dots\dots\dots (6) \end{aligned}$$

وبما أن:

$$\eta_{jk}(p';t) = \frac{1}{2} [\delta_{jk} - B_{jk}(p';t)] \Leftrightarrow [\delta_{jk} - B_{jk}(p';t)] = 2\eta_{jk}(p';t)$$

فبالتعويض في (6) نجد:

$$(dS)^2 - (dS_0)^2 = 2\eta_{jk}(p';t) d\xi_j d\xi_k$$

وهو المطلوب الثاني.

انتهت المحاضرة.

بتاريخ 26 10 2010 .



جامعة البعث.

كلية العلوم.

قسم الرياضيات.

السنة الرابعة (ميكانيك).

علم المرونة

القسم النظري

المحاضرة الخامسة عشر

تعريف 1: (التبديلة).

لتكن i, j, k ثلاثة دلائل مختلفة مثتى مثتى، عندئذٍ نسمي الثلاثية (i, j, k) تبديلة للأعداد $1, 2, 3$.

مثال 1:

$(3, 2, 1)$ هي تبديلة للأعداد $1, 2, 3$.

تعريف 2: (التغيير في التبديلة).

لتكن (i, j, k) تبديلة للأعداد $1, 2, 3$. عندئذٍ إذا ما بادلنا رقمين من أرقام التبديلة (i, j, k) فإننا ندعو التبديلة الناتجة تغييراً في التبديلة الأصلية (i, j, k) .

مثال 2:

لنأخذ التبديلة $(3, 1, 2)$ عندئذٍ فإن $(3, 2, 1)$ هو تغيير في التبديلة الأصلية $(3, 1, 2)$.

تعريف 3: (التبديلة الزوجية للأعداد $1, 2, 3$).

نقول عن التبديلة (i, j, k) أنها تبديلة زوجية للأعداد $1, 2, 3$ إذا وفقط إذا كان عدد التغييرات التي نجريها على التبديلة $(1, 2, 3)$ حتى نصل إلى التبديلة (i, j, k) هو عدد زوجي.

تعريف 4: (التبديلة الفردية للأعداد $1, 2, 3$).

نقول عن التبديلة (i, j, k) أنها تبديلة فردية للأعداد $1, 2, 3$ إذا وفقط إذا كان عدد التغييرات التي نجريها على التبديلة $(1, 2, 3)$ حتى نصل إلى التبديلة (i, j, k) هو عدد فردي.

مثال 3:

التبديلة $(2, 1, 3)$ هي تبديلة فردية للأعداد $1, 2, 3$ لأن عدد التغييرات التي قمنا بها للحصول على التبديلة $(2, 1, 3)$ هو عدد فردي، ولتوضيح ذلك نكتب:

$$(1, 2, 3) \xrightarrow{\text{تغيير أول}} (2, 1, 3)$$

كما نلاحظ لدينا تغيير واحد، وبالتالي فالتبديلة فردية.

مثال 4:

التبديلة (2,3,1) هي تبديلة زوجية للأعداد 1, 2, 3 لأنه:

$$(1,2,3) \xrightarrow{\text{تغيير أول}} (2,1,3) \xrightarrow{\text{تغيير ثان}} (2,3,1)$$

كما نلاحظ، لدينا تغييران حصلا في التبديلة الأصلية، وبالتالي التبديلة زوجية.

ملاحظة:

التبديلة (1,2,3) هي تبديلة زوجية للأعداد 1, 2, 3.

تعريف: (مناوب ليفي - تشيفيتي).

نسمي ثلاثي الدلائل e_{ijk} والمعرف بالشكل:

$$e_{ijk} = \begin{cases} 0 & ; \quad i, j, k \text{ من الدلائل } 1, 2, 3 \\ 1 & ; \quad \text{إذا كانت } (i, j, k) \text{ تبديلة زوجية للأعداد } 1, 2, 3 \\ -1 & ; \quad \text{إذا كانت } (i, j, k) \text{ تبديلة فردية للأعداد } 1, 2, 3 \end{cases}$$

$$\forall i, j, k = 1, 2, 3$$

نسميه مناوب ليفي - تشيفيتي.

مثال 5:

$$e_{112} = e_{212} = e_{323} = 0 \quad , \quad e_{231} = e_{312} = e_{123} = 1 \quad , \quad e_{321} = e_{132} = e_{213} = -1$$

تمرين:

$$\left. \begin{aligned} e_{jik} &= -e_{ijk} \\ e_{kji} &= -e_{ijk} \\ e_{ikj} &= -e_{ijk} \end{aligned} \right\} \quad \forall i, j, k = 1, 2, 3 \quad \text{أثبت أنه:}$$

انتهت المحاضرة.

بنامريخ 28 10 2010 .



جامعة البعث.

كلية العلوم.

قسم الرياضيات.

السنة الرابعة (ميكانيك).

علم المرونة

القسم النظري

المحاضرة الثانية عشر

علمنا في محاضرة سابقة أن العنصر الخطي اللاغرانجي من الوسط المادي المستمر S ، الذي بدايته النقطة اللاغرانجية p ، يعطى بالعلاقة:

$$\overrightarrow{dS_0} := \overrightarrow{pQ} = dx_1 \overrightarrow{e_1} + dx_2 \overrightarrow{e_2} + dx_3 \overrightarrow{e_3} = dx_i \overrightarrow{e_i}$$

وليكن:

$$dS_0 := |\overrightarrow{dS_0}|$$

عندئذٍ لنأخذ بالتعريف:

$$v_1 := \frac{dx_1}{dS_0}, \quad v_2 := \frac{dx_2}{dS_0}, \quad v_3 := \frac{dx_3}{dS_0}$$

واختصاراً:

$$v_i := \frac{dx_i}{dS_0} \quad ; \quad i = 1, 2, 3$$

ولندعوا v_1, v_2, v_3 بجيوب تمام توجيه $\overrightarrow{dS_0}$.

كما علمنا أن العنصر الخطي الأولري من الوسط المادي المستمر S في اللحظة $t > 0$ ، والذي بدايته النقطة المادية الأولرية p' ، يعطى بالعلاقة:

$$\overrightarrow{dS} := \overrightarrow{p'Q'} = d\xi_1 \overrightarrow{e_1} + d\xi_2 \overrightarrow{e_2} + d\xi_3 \overrightarrow{e_3} = d\xi_i \overrightarrow{e_i}$$

وليكن:

$$dS := |\overrightarrow{dS}|$$

عندئذٍ لنأخذ بالتعريف:

$$v_1^* := \frac{d\xi_1}{dS}, \quad v_2^* := \frac{d\xi_2}{dS}, \quad v_3^* := \frac{d\xi_3}{dS}$$

واختصاراً:

$$v_i^* := \frac{d\xi_i}{dS} \quad ; \quad i = 1, 2, 3$$

ولندعوا v_1^*, v_2^*, v_3^* بجيوب تمام توجيه $\overrightarrow{dS}$.

عندئذٍ لنأخذ المبرهنة التالية:

مبرهنة 1:

$$\lambda_{pQ} \left(1 + \frac{1}{2} \lambda_{pQ} \right) = e_{jk} (p; t) v_j v_k \quad (1)$$

$$\frac{\lambda_{pQ} \left(1 + \frac{1}{2} \lambda_{pQ} \right)}{(1 + \lambda_{pQ})^2} = \eta_{jk} (p'; t) v_j^* v_k^* \quad (2)$$

$$v_i^* = \frac{\partial \xi_i}{\partial x_j} (p; t) \cdot \frac{v_j}{1 + \lambda_{pQ}} = \left[\delta_{ij} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} (p; t) \right] \frac{v_j}{1 + \lambda_{pQ}} \quad (3)$$

$$\frac{v_i}{1 + \lambda_{pQ}} = \frac{\partial x_i}{\partial \xi_j} (p'; t) \cdot v_j^* = \left[\delta_{ij} - \frac{\partial u_i}{\partial \xi_j} (p'; t) \right] \cdot v_j^* \quad (4)$$

البرهان:

(1) وجدنا وفقاً لمبرهنة في محاضرة سابقة أن:

$$(dS)^2 - (dS_0)^2 = 2e_{jk} (p; t) dx_j dx_k$$

نقسم طرفي العلاقة السابقة على $(dS_0)^2$ فنجد:

$$\begin{aligned} \left(\frac{dS}{dS_0} \right)^2 - 1 &= 2e_{jk} (p; t) \frac{dx_j}{dS_0} \frac{dx_k}{dS_0} \\ \Rightarrow \left(1 + \lambda_{pQ} \right)^2 - 1 &= 2e_{jk} (p; t) \cdot v_j \cdot v_k \\ \Rightarrow \lambda_{pQ}^2 + 2\lambda_{pQ} &= 2e_{jk} (p; t) \cdot v_j \cdot v_k \\ \Rightarrow \lambda_{pQ} \left(1 + \frac{1}{2} \lambda_{pQ} \right) &= e_{jk} (p; t) \cdot v_j \cdot v_k \end{aligned}$$

وهو المطلوب الأول.

(2) كما وجدنا أيضاً أن:

$$(dS)^2 - (dS_0)^2 = 2\eta_{jk} (p'; t) d\xi_j d\xi_k$$

نقسم طرفي العلاقة السابقة على $(dS)^2$ فنجد:

$$\begin{aligned}
 1 - \left(\frac{dS_0}{dS} \right)^2 &= 2\eta_{jk}(p';t) \frac{d\xi_j}{dS} \frac{d\xi_k}{dS} \\
 \Rightarrow 1 - \frac{1}{(1 + \lambda_{pQ})^2} &= 2\eta_{jk}(p';t) \cdot v_j^* \cdot v_k^* \\
 \Rightarrow \frac{(1 + \lambda_{pQ})^2 - 1}{(1 + \lambda_{pQ})^2} &= 2\eta_{jk}(p';t) \cdot v_j^* \cdot v_k^* \\
 \Rightarrow \frac{\lambda_{pQ} \left(1 + \frac{1}{2} \lambda_{pQ} \right)}{(1 + \lambda_{pQ})^2} &= \eta_{jk}(p';t) \cdot v_j^* \cdot v_k^*
 \end{aligned}$$

وهو المطلوب الثاني.

(3) وجدنا أن:

$$\xi_i = \xi_i(p; t) ; i = 1, 2, 3$$

فمن أجل $t = \text{const} > 0$ ، تصبح العلاقة السابقة:

$$\xi_i = \xi_i(p) ; i = 1, 2, 3$$

وبالتالي يكون:

$$d\xi_i = \frac{\partial \xi_i}{\partial x_1}(p; t) dx_1 + \frac{\partial \xi_i}{\partial x_2}(p; t) dx_2 + \frac{\partial \xi_i}{\partial x_3}(p; t) dx_3$$

بأخذ j دليلاً مكرراً، نكتب:

$$d\xi_i = \frac{\partial \xi_i}{\partial x_j}(p; t) dx_j ; j = 1, 2, 3 \quad \dots (*)$$

بتقسيم طرفي العلاقة الأخيرة على dS نجد:

$$\frac{d\xi_i}{dS} = \frac{\partial \xi_i}{\partial x_j}(p; t) \frac{dx_j}{dS_0} \frac{dS_0}{dS}$$

وبإجراء التعويضات المناسبة نجد:

$$v_i^* = \frac{\partial \xi_i}{\partial x_j}(p; t) \frac{v_j}{1 + \lambda_{pQ}} \quad \dots\dots\dots (*)'$$

وبما أن المركبات الديكارتية اللاغرانجية لمتجه الإزاحة $\vec{u}$ تعطى بـ :

$$u_i(p; t) = \xi_i(p; t) - x_i \quad ; \quad i = 1, 2, 3$$

$$\Rightarrow \xi_i(p; t) = u_i(p; t) + x_i \quad ; \quad i = 1, 2, 3$$

باشتقاق طرفي العلاقة الأخيرة، جزئياً بالنسبة لـ x_j نجد:

$$\frac{\partial \xi_i}{\partial x_j}(p; t) = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}(p; t) + \delta_{ij}$$

بالتعويض في (*)' نجد:

$$v_i^* = \left[\delta_{ij} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j}(p; t) \right] \frac{v_j}{1 + \lambda_{pQ}}$$

وهو المطلوب الثالث.

(4) كما وجدنا أن:

$$x_i = x_i(p'; t) \quad ; \quad i = 1, 2, 3$$

فمن أجل $t = \text{const} > 0$ ، تصبح العلاقة السابقة:

$$x_i = x_i(p) \quad ; \quad i = 1, 2, 3$$

وبالتالي يكون:

$$dx_i = \frac{\partial x_i}{\partial \xi_1}(p'; t) d\xi_1 + \frac{\partial x_i}{\partial \xi_2}(p'; t) d\xi_2 + \frac{\partial x_i}{\partial \xi_3}(p'; t) d\xi_3$$

بأخذ j دليلاً مكرراً، نكتب:

$$dx_i = \frac{\partial x_i}{\partial \xi_j}(p'; t) d\xi_j \quad ; \quad j = 1, 2, 3 \quad \dots\dots\dots (*)''$$

بتقسيم طرفي العلاقة الأخيرة على dS_0 نجد:

$$\frac{dx_i}{dS_0} = \frac{\partial x_i}{\partial \xi_j}(p'; t) \frac{d\xi_j}{dS} \frac{dS}{dS_0}$$

وبإجراء التعويضات المناسبة نجد:

$$v_i = \frac{\partial x_i}{\partial \xi_j}(p';t) \cdot v_j^* (1 + \lambda_{pQ})$$

نقسم طرفي العلاقة السابقة على $(1 + \lambda_{pQ})$ ، فنجد:

$$\frac{v_i}{(1 + \lambda_{pQ})} = \frac{\partial x_i}{\partial \xi_j}(p';t) \cdot v_j^* \quad \dots\dots\dots (**)$$

وبما أن المركبات الديكارتية الأولية لمتجه الإزاحة $\vec{u}$ ، تعطى بـ :

$$u_i(p';t) = \xi_i - x_i(p';t) ; i = 1, 2, 3$$

$$\Rightarrow x_i(p';t) = \xi_i - u_i(p';t) ; i = 1, 2, 3$$

باشتقاق طرفي العلاقة الأخيرة، جزئياً بالنسبة لـ ξ_j نجد:

$$\frac{\partial x_i}{\partial \xi_j}(p';t) = \delta_{ij} - \frac{\partial u_i}{\partial \xi_j}(p';t)$$

بالتعويض في (**)، نجد:

$$\frac{v_i}{1 + \lambda_{pQ}} = \left[\delta_{ij} - \frac{\partial u_i}{\partial \xi_j}(p';t) \right] \cdot v_j^*$$

وهو المطلوب الرابع.

المعنى الهندسي لمصفوفة الانفعالات اللاغرانجية $\{e_{jk}(p;t)\}_{3 \times 3}$.

أولاً: المعنى الهندسي لعناصر القطر الرئيسي: $\{e_{11}(p;t), e_{22}(p;t), e_{33}(p;t)\}$

وجدنا في المبرهنة السابقة أن العلاقة:

$$\lambda_{pQ} \left(1 + \frac{1}{2} \lambda_{pQ} \right) = e_{jk}(p;t) v_j v_k$$

صحيحة من أجل أي عنصر خطي: $\vec{ds}_0 := \vec{pQ} = dx_1 \vec{e}_1 + dx_2 \vec{e}_2 + dx_3 \vec{e}_3 = dx_i \vec{e}_i$ ،

والذي جيوب تمام توجيهه هي: $i = 1, 2, 3$; v_i ، والذي بدايته النقطة p وتغيره النسبي في اللحظة $t > 0$ هو: $\lambda_{pQ} = \frac{dS - dS_0}{dS_0}$. حيث أن العنصر الخطي $\overrightarrow{dS}$ يعطى:

$$\overrightarrow{dS} := \overrightarrow{p'Q'} = d\xi_1 \overrightarrow{e_1} + d\xi_2 \overrightarrow{e_2} + d\xi_3 \overrightarrow{e_3} = d\xi_i \overrightarrow{e_i}$$

إن الكلام السابق يبقى صحيحاً من أجل العنصر الخطي:

$$\overrightarrow{dS_0^{(1)}} := dx_1 \overrightarrow{e_1} \quad ; \quad dx_1 > 0$$

والذي جيوب تمام توجيهه هي:

$$v_i^{(1)} = \delta_{1i} \quad ; \quad i = 1, 2, 3$$

وبدايته النقطة p ، وتغيره النسبي في اللحظة $t > 0$ هو: $\lambda_{11} = \frac{dS^{(1)} - dS_0^{(1)}}{dS_0^{(1)}}$ ، حيث:

$\overrightarrow{dS}^{(1)}$ هو العنصر الخطي الأولري الموافق في اللحظة $t > 0$.

وبالتالي تصبح العلاقة المعطاة لدينا بالشكل:

$$\begin{aligned} \lambda_{11} \left(1 + \frac{1}{2} \lambda_{11} \right) &= e_{jk}(p; t) v_j^{(1)} v_k^{(1)} \\ \Rightarrow \lambda_{11} \left(1 + \frac{1}{2} \lambda_{11} \right) &= e_{jk}(p; t) \delta_{1j} \delta_{1k} \end{aligned}$$

وباستخدام خاصية تصفية كرونك مرتين، نحصل على:

$$\lambda_{11} \left(1 + \frac{1}{2} \lambda_{11} \right) = e_{11}(p; t)$$

انتهت المحاضرة .

بنامريخ 31 10 2010 .



جامعة البعث.

كلية العلوم.

قسم الرياضيات.

السنة الرابعة (ميكانيك).

علم المرونة

القسم النظري

المحاضرة الثالثة عشر

وصلنا في المحاضرة السابقة إلى العلاقة:

$$\lambda_{11} \left(1 + \frac{1}{2} \lambda_{11} \right) = e_{11}(p; t)$$

والتي نكتب بالشكل:

$$\lambda_{11}^2 + 2\lambda_{11} - 2e_{11}(p; t) = 0 \quad \dots\dots\dots (1)$$

فإذا فرضنا أن $e_{11}(p; t)$ معلوم، و λ_{11} مجهول؛ فتصبح المعادلة الجبرية (1) من الدرجة الثانية بالمجهول λ_{11} وذات أمثال حقيقية. لحلها نحسب مميز هذه المعادلة:

$$\Delta_1 = 4 + 8e_{11}(p; t) = 4 \left[1 + 2e_{11}(p; t) \right] > 0 \quad ; \quad \forall p \in B \quad \wedge \quad \forall t > 0$$

$$\Rightarrow \sqrt{\Delta_1} = 2\sqrt{1 + 2e_{11}(p; t)} > 0 \quad ; \quad \forall p \in B \quad \wedge \quad \forall t > 0.$$

وبالتالي، يكون للمعادلة (1) جذران حقيقيان مختلفان هما:

$$\lambda'_{11} = \frac{-2 - 2\sqrt{1 + 2e_{11}(p; t)}}{2} = -1 - \sqrt{1 + 2e_{11}(p; t)} < -1$$

وبالتالي هذا الجذر مرفوض، لأنه لو فرضنا جديلاً أن λ'_{11} يمثل التغير النسبي المطلوب لكانت العلاقة التالية محققة:

$$\lambda'_{11} = \frac{dS^{(1)} - dS_0^{(1)}}{dS_0^{(1)}} < -1$$

$$\Rightarrow \frac{dS^{(1)}}{dS_0^{(1)}} - 1 < -1 \Rightarrow \frac{dS^{(1)}}{dS_0^{(1)}} < 0$$

وهذا كلام مرفوض لأن النسبة الأخيرة تمثل مقداراً موجباً (طول على طول)، وبالتالي فرضنا الجدلي خاطئ، وبالتالي λ'_{11} لا تمثل التغير النسبي المطلوب.

ويكون الجذر المقبول λ_{11} هو الجذر الثاني، الذي نحصل عليه من خلال ما يلي:

$$\lambda_{11} = \frac{-2 + 2\sqrt{1 + 2e_{11}(p; t)}}{2} = -1 + \sqrt{1 + 2e_{11}(p; t)}$$

وهنا نميز الحالات الثلاث التالي:

$$\begin{aligned}\lambda_{11} > 0 &\Leftrightarrow -1 + \sqrt{1 + 2e_{11}(p;t)} > 0 \Leftrightarrow \sqrt{1 + 2e_{11}(p;t)} > 1 \\ &\Leftrightarrow 1 + 2e_{11}(p;t) > 1 \Leftrightarrow e_{11}(p;t) > 0\end{aligned}\quad (1)$$

في هذه الحالة يكون لدينا تمدد نسبي لطول العنصر الخطي $\overrightarrow{dS_0^{(1)}}$ ، في النقطة p واللحظة $t > 0$.

$$\begin{aligned}\lambda_{11} < 0 &\Leftrightarrow -1 + \sqrt{1 + 2e_{11}(p;t)} < 0 \Leftrightarrow \sqrt{1 + 2e_{11}(p;t)} < 1 \\ &\Leftrightarrow 1 + 2e_{11}(p;t) < 1 \Leftrightarrow e_{11}(p;t) < 0\end{aligned}\quad (2)$$

في هذه الحالة يكون لدينا تقلص نسبي لطول العنصر الخطي $\overrightarrow{dS_0^{(1)}}$ ، في النقطة p واللحظة $t > 0$.

$$\begin{aligned}\lambda_{11} = 0 &\Leftrightarrow -1 + \sqrt{1 + 2e_{11}(p;t)} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{1 + 2e_{11}(p;t)} = 1 \\ &\Leftrightarrow 1 + 2e_{11}(p;t) = 1 \Leftrightarrow e_{11}(p;t) = 0\end{aligned}\quad (3)$$

في هذه الحالة يكون لدينا محافظة نسبية لطول العنصر الخطي $\overrightarrow{dS_0^{(1)}}$ ، في النقطة p واللحظة $t > 0$.

تعريف:

نسمي λ_{11} بالتغير النسبي باتجاه المحور الإحداثي $\overrightarrow{Ox_1}$ ، في النقطة p واللحظة $t > 0$.

ومنه يكون المعنى الهندسي التالي لـ $e_{11}(p;t)$:

* يكون لدينا تمدد نسبي باتجاه المحور الإحداثي $\overrightarrow{Ox_1}$ ، في النقطة p واللحظة $t > 0$ ، إذا وفقط إذا كان: $e_{11}(p;t) > 0$.

* يكون لدينا تقلص نسبي باتجاه المحور الإحداثي $\overrightarrow{Ox_1}$ ، في النقطة p واللحظة $t > 0$ ، إذا وفقط إذا كان: $e_{11}(p;t) < 0$.

* يكون لدينا محافظة نسبية باتجاه المحور الإحداثي $\overrightarrow{Ox_1}$ ، في النقطة p واللحظة $t > 0$ ، إذا وفقط إذا كان: $e_{11}(p;t) = 0$.

من أجل العنصر الخطي اللاغرانجي:

$$\overrightarrow{dS_0^{(2)}} = \overrightarrow{PQ} = dx_2 \overrightarrow{e_2} \quad ; \quad dx_2 > 0$$

والذي جيوب تمام توجيهه هي:

$$v_i^{(2)} = \delta_{2i} \quad ; \quad i = 1, 2, 3$$

وبدأته النقطة p ، وتغيره النسبي في اللحظة $t > 0$ هو: $\lambda_{22} = \frac{dS_0^{(2)} - dS_0^{(2)}}{dS_0^{(2)}}$ ، حيث:

$\overrightarrow{dS}^{(2)}$ هو العنصر الخطي الأولري الموافق في اللحظة $t > 0$.

عندئذٍ ستصبح العلاقة: $\lambda_{pQ} \left(1 + \frac{1}{2} \lambda_{pQ} \right) = e_{jk}(p; t) v_j v_k$ من أجل هذا العنصر

الخطي بالشكل:

$$\lambda_{22} \left(1 + \frac{1}{2} \lambda_{22} \right) = e_{jk}(p; t) v_j^{(2)} v_k^{(2)} \Rightarrow \lambda_{22} \left(1 + \frac{1}{2} \lambda_{22} \right) = e_{jk}(p; t) \delta_{2j} \delta_{2k}$$

وباستخدام خاصية تصفية دلتا كرونكيا مرتين، نحصل على:

$$\lambda_{22} \left(1 + \frac{1}{2} \lambda_{22} \right) = e_{22}(p; t)$$

بإصلاح هذه العلاقة نجد:

$$\lambda_{22}^2 + 2\lambda_{22} - 2e_{22}(p; t) = 0 \quad \dots\dots\dots (2)$$

فإذا فرضنا أن $e_{22}(p; t)$ معلوم، و λ_{22} مجهول؛ فتصبح المعادلة الجبرية (2) من الدرجة الثانية بالمجهول λ_{22} وذات أمثال حقيقية. لحلها نحسب مميز هذه المعادلة:

$$\Delta_2 = 4 + 8e_{22}(p; t) = 4 \overbrace{\left[1 + 2e_{22}(p; t) \right]}^{1+2e_{22}(p; t) > 0} > 0 \quad ; \quad \forall p \in B \quad \wedge \quad \forall t > 0$$

$$\Rightarrow \sqrt{\Delta_2} = 2\sqrt{1+2e_{22}(p; t)} > 0 \quad ; \quad \forall p \in B \quad \wedge \quad \forall t > 0.$$

وبالتالي، يكون للمعادلة (2) جذران حقيقيان مختلفان هما:

$$\lambda'_{22} = \frac{-2 - 2\sqrt{1+2e_{22}(p; t)}}{2} = -1 - \sqrt{1+2e_{22}(p; t)} < -1$$

وبالتالي فهذا الجذر مرفوض. (يناقش بشكل مشابه للحالة الأولى).

ويكون الجذر المقبول λ_{22} هو الجذر الثاني الذي نحصل عليه من خلال ما يلي:

$$\lambda_{22} = \frac{-2 + 2\sqrt{1 + 2e_{22}(p;t)}}{2} = -1 + \sqrt{1 + 2e_{22}(p;t)}$$

وهنا نميز الحالات الثلاث التالي:

$$\begin{aligned} \lambda_{22} > 0 &\Leftrightarrow -1 + \sqrt{1 + 2e_{22}(p;t)} > 0 \Leftrightarrow \sqrt{1 + 2e_{22}(p;t)} > 1 \\ &\Leftrightarrow 1 + 2e_{22}(p;t) > 1 \Leftrightarrow e_{22}(p;t) > 0 \end{aligned} \quad (1)$$

في هذه الحالة يكون لدينا تمدد نسبي لطول العنصر الخطي $\overrightarrow{dS_0^{(2)}}$ ، في النقطة p واللحظة $t > 0$.

$$\begin{aligned} \lambda_{22} < 0 &\Leftrightarrow -1 + \sqrt{1 + 2e_{22}(p;t)} < 0 \Leftrightarrow \sqrt{1 + 2e_{22}(p;t)} < 1 \\ &\Leftrightarrow 1 + 2e_{22}(p;t) < 1 \Leftrightarrow e_{22}(p;t) < 0 \end{aligned} \quad (2)$$

في هذه الحالة يكون لدينا تقلص نسبي لطول العنصر الخطي $\overrightarrow{dS_0^{(2)}}$ ، في النقطة p واللحظة $t > 0$.

$$\begin{aligned} \lambda_{22} = 0 &\Leftrightarrow -1 + \sqrt{1 + 2e_{22}(p;t)} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{1 + 2e_{22}(p;t)} = 1 \\ &\Leftrightarrow 1 + 2e_{22}(p;t) = 1 \Leftrightarrow e_{22}(p;t) = 0 \end{aligned} \quad (3)$$

في هذه الحالة يكون لدينا محافظة نسبية لطول العنصر الخطي $\overrightarrow{dS_0^{(2)}}$ ، في النقطة p واللحظة $t > 0$.

تعريف:

نسمي λ_{22} بالتغير النسبي باتجاه المحور الإحداثي $\overrightarrow{Ox_2}$ ، في النقطة p واللحظة $t > 0$.

ومنه يكون المعنى الهندسي التالي لـ $e_{22}(p;t)$:

* يكون لدينا تمدد نسبي باتجاه المحور الإحداثي $\overrightarrow{Ox_2}$ ، في النقطة p واللحظة $t > 0$ ، إذا وفقط إذا كان: $e_{22}(p;t) > 0$.

* يكون لدينا تقلص نسبي باتجاه المحور الإحداثي $\overrightarrow{Ox_2}$ ، في النقطة p واللحظة $t > 0$ ، إذا وفقط إذا كان: $e_{22}(p;t) < 0$.

* يكون لدينا محافظة نسبية باتجاه المحور الإحداثي $\overrightarrow{Ox_2}$ ، في النقطة p واللحظة $t > 0$ إذا وفقط إذا كان: $e_{22}(p; t) = 0$.

بنفس الطريقة نجد أنه لو أخذنا العنصر الخطي اللاغرانجي:

$$\overrightarrow{dS_0^{(3)}} = \overrightarrow{pQ} = dx_3 \overrightarrow{e_3} \quad ; \quad dx_3 > 0$$

فسنحصل بطريقة مشابهة للحالتين السابقتين على:

$$\lambda_{33} = -1 + \sqrt{1 + 2e_{33}(p; t)}$$

تعريف:

نسمي λ_{33} بالتغير النسبي باتجاه المحور الإحداثي $\overrightarrow{Ox_3}$ ، في النقطة p واللحظة $t > 0$.

ومنه يكون المعنى الهندسي التالي لـ $e_{33}(p; t)$:

* يكون لدينا تمدد نسبي باتجاه المحور الإحداثي $\overrightarrow{Ox_3}$ ، في النقطة p واللحظة $t > 0$ ، إذا وفقط إذا كان: $e_{33}(p; t) > 0$.

* يكون لدينا تقلص نسبي باتجاه المحور الإحداثي $\overrightarrow{Ox_3}$ ، في النقطة p واللحظة $t > 0$ ، إذا وفقط إذا كان: $e_{33}(p; t) < 0$.

* يكون لدينا محافظة نسبية باتجاه المحور الإحداثي $\overrightarrow{Ox_3}$ ، في النقطة p واللحظة $t > 0$ ، إذا وفقط إذا كان: $e_{33}(p; t) = 0$.

انتهت المحاضرة.

بناريغ 2 11 2010 .



جامعة البعث.

كلية العلوم.

قسم الرياضيات.

السنة الرابعة (ميكانيك).

علم المرونة

القسم النظري

المحاضرة الرابعة عشر

تمرين:

أثبت أنه:

$$\left. \begin{array}{l} e_{jik} = -e_{ijk} \\ e_{kji} = -e_{ijk} \\ e_{ikj} = -e_{ijk} \end{array} \right\} \forall i, j, k = 1, 2, 3$$

الحل:

لنثبت العلاقة الأولى، وباقي العلاقات تبرهن بنفس الشكل.

لتكن (i, j, k) ثلاثية اختيارية للأعداد 1, 2, 3. نميز الحالات التالية:

(1) إذا تساوى دليلان على الأقل من الدلائل i, j, k يكون: $e_{ijk} = 0$, $e_{jik} = 0$ والعلاقة محققة في هذه الحالة.

(2) إذا كانت (i, j, k) تبديلة زوجية للأعداد 1, 2, 3 يكون: $e_{ijk} = 1$, كما تكون (j, i, k) تبديلة فردية للأعداد 1, 2, 3، وبالتالي: $e_{jik} = -1$ والعلاقة محققة في هذه الحالة أيضاً.

(3) إذا كانت (i, j, k) تبديلة فردية للأعداد 1, 2, 3 يكون: $e_{ijk} = -1$, كما تكون (j, i, k) تبديلة زوجية للأعداد 1, 2, 3، وبالتالي: $e_{jik} = 1$ والعلاقة محققة في هذه الحالة أيضاً.

من الحالات الثلاث السابقة نستنتج أن: $\forall i, j, k = 1, 2, 3$; $e_{ijk} = -e_{jik}$

ملاحظة (من الجبر):

ليكن Δ معيناً ما. إذا أجرينا على أسطر (أعمدة) هذا المعين عدداً زوجياً من التبديلات نحصل على معين جديد Δ_1 ، بحيث: $\Delta_1 = \Delta$ ؛ أما إذا أجرينا على أسطر (أعمدة) المعين Δ عدداً فردياً من التبديلات نحصل على معين جديد Δ_2 ، بحيث: $\Delta_2 = -\Delta$. وفي الحالة العامة إذا أجرينا عدداً n من التبديلات على أسطر (أعمدة) المعين Δ فإننا نحصل على معين جديد Δ_3 ، بحيث: $\Delta_3 = (-1)^n \Delta$.

حالة خاصة:

لنأخذ المعين الواحد من المرتبة الثالثة، والمعطى بالشكل:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

فإذا أجرينا على أسطر (أعمدة) هذا المعين عدداً زوجياً من التبديلات نحصل على معين جديد: $\Delta_1 = 1$ ، وإذا أجرينا على أسطر (أعمدة) هذا المعين عدداً فردياً من التبديلات نحصل على معين جديد: $\Delta_2 = -1$ ، أما إذا أجرينا على أسطر (أعمدة) هذا المعين عدداً n من التبديلات، نحصل على معين جديد: $\Delta_3 = (-1)^n$.

تمرين 1:

لنضع:

$$\underline{1} = (1, 0, 0) , \underline{2} = (0, 1, 0) , \underline{3} = (0, 0, 1).$$

وبشكل عام لنضع $\underline{i}$ هي الثلاثية التي جميع عناصرها أصفار ما عدا العنصر i فهو يساوي 1. عندئذ أثبت أن:

$$e_{ijk} = \begin{vmatrix} \underline{i} \\ \underline{j} \\ \underline{k} \end{vmatrix} ; \forall i, j, k = 1, 2, 3.$$

(فكرة الحل: بالاعتماد على التبديلات الزوجية والفردية).

انتهت المحاضرة.

بنامريخ 4 11 2010 .



جامعة البعث.

كلية العلوم.

قسم الرياضيات.

السنة الرابعة (ميكانيك).

علم المرونة

القسم النظري

المحاضرة الخامسة عشر

ملاحظة 1:

ليكن: $\vec{0} \neq \vec{a} = a_i \vec{e}_i$, $\vec{0} \neq \vec{b} = b_i \vec{e}_i$ ولنرمز بـ : $a := |\vec{a}|$, $b := |\vec{b}|$ ولنرمز أيضاً بـ : $\varphi = (\vec{a}, \vec{b})$ و $\alpha_i = \frac{a_i}{a}$, $\beta_i = \frac{b_i}{b}$ عندئذ يكون:

$$\cos \varphi = \alpha_i \beta_i$$

الإثبات:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_i b_i = ab \cdot \cos \varphi \Rightarrow$$

$$\cos \varphi = \frac{a_i b_i}{ab} = \alpha_i \beta_i$$

مبرهنة 1:

ليكن: $p \equiv (x_1, x_2, x_3)$; $\overrightarrow{dS_0^I} = \overrightarrow{pQ}$ ، وبحيث Q قريبة من p ، عنصراً خطياً لاغرانجياً أولاً، بدايته النقطة p ، ولنفرض أن جيوب تمام توجيهه هي: v_i^I ; $i=1,2,3$. ولنفرض أن العنصر الخطي الأولري الموافق في اللحظة $t > 0$ هو: $p' \equiv (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ ، الذي بدايته النقطة p' ، ولنفرض أن جيوب تمام توجيهه هي: v_i^{*I} ; $i=1,2,3$. وليكن $\lambda_{pQ} = \frac{dS_0^I - dS_0^I}{dS_0^I}$ هو التغير النسبي لـ $\overrightarrow{dS_0^I}$ في النقطة p واللحظة $t > 0$.

وليكن: $\overrightarrow{dS_0^{II}} = \overrightarrow{pR}$ ، وبحيث R قريبة من p ، عنصراً خطياً لاغرانجياً آخرًا، بدايته النقطة p ، ولنفرض أن جيوب تمام توجيهه هي: v_i^{II} ; $i=1,2,3$. ولنفرض أن العنصر الخطي الأولري الموافق في اللحظة $t > 0$ هو: $p' \equiv (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ ، الذي بدايته النقطة p' ، ولنفرض أن جيوب تمام توجيهه هي: v_i^{*II} ; $i=1,2,3$. وليكن $\lambda_{pR} = \frac{dS_0^{II} - dS_0^{II}}{dS_0^{II}}$ هو التغير النسبي لـ $\overrightarrow{dS_0^{II}}$ في النقطة p واللحظة $t > 0$.

وأخيراً لنرمز بـ : $\varphi(I, II) := (\widehat{\overrightarrow{dS_0^I}, \overrightarrow{dS_0^{II}}})$ (أي أنها زاوية لاغرانجية)، ولنرمز

بـ : $\varphi^*(I, II) := (\widehat{\overrightarrow{dS^I}, \overrightarrow{dS^{II}}})$ (أي أنها زاوية أولرية).

عندئذٍ نتص المبرهنة على أن:

$$(1 + \lambda_{pQ}) \cdot (1 + \lambda_{pR}) \cdot \cos[\varphi^*(I, II)] = \cos[\varphi(I, II)] + 2e_{jk}(p; t) \cdot v_j^I \cdot v_k^{II}$$

البرهان:

وجدنا في المبرهنة الأخيرة التي وصلنا إليها أن العلاقة:

$$v_i^* = \frac{\partial \xi_i}{\partial x_j}(p; t) \cdot \frac{v_j}{1 + \lambda_{pQ}}$$

تكون صحيحة من أجل أي عنصر خطي لاغرانجي: $p \equiv (x_1, x_2, x_3)$ وبحيث أن Q قريبة من p ، وجيوب تمام توجيهه هي v_i ، والعنصر الخطي الأولي الموافق في اللحظة $t > 0$: (ξ_1, ξ_2, ξ_3) ; $p' \equiv (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$; $d\vec{S} = \overrightarrow{p'Q'}$ ، والذي جيوب تمام توجيهه هي v_i^* ، والتغير النسبي لـ $d\vec{S}_0$ في النقطة p واللحظة $t > 0$ الذي يعطى بـ:

$$\lambda_{pQ} = \frac{dS - dS_0}{dS_0}$$

عندئذٍ ستبقى هذه العلاقة صحيحة من أجل العنصر الخطي اللاغرانجي الأول $\overrightarrow{dS_0^I} = \overrightarrow{pQ}$ وستبقى صحيحة من أجل العنصر الخطي اللاغرانجي الثاني $\overrightarrow{dS_0^{II}} = \overrightarrow{pR}$. فمن أجل العنصر الخطي الأول $\overrightarrow{dS_0^I} = \overrightarrow{pQ}$ ، تصبح هذه العلاقة بالشكل:

$$v_i^{*I} = \frac{\partial \xi_i}{\partial x_j}(p; t) \cdot \frac{v_j^I}{1 + \lambda_{pQ}} \quad \dots\dots\dots (1)$$

ومن أجل العنصر الخطي الثاني $\overrightarrow{dS_0^{II}} = \overrightarrow{pR}$ ، تصبح هذه العلاقة بالشكل:

$$v_i^{*II} = \frac{\partial \xi_i}{\partial x_j}(p; t) \cdot \frac{v_j^{II}}{1 + \lambda_{pR}} = \frac{\partial \xi_i}{\partial x_k}(p; t) \cdot \frac{v_k^{II}}{1 + \lambda_{pR}} \quad \dots\dots\dots (2)$$

بضرب (1) بـ (2) طرفاً بطرف نحصل على:

$$\begin{aligned} v_i^{*I} \cdot v_i^{*II} &= \left[\frac{\partial \xi_i}{\partial x_j}(p; t) \cdot \frac{v_j^I}{1 + \lambda_{pQ}} \right] \cdot \left[\frac{\partial \xi_i}{\partial x_k}(p; t) \cdot \frac{v_k^{II}}{1 + \lambda_{pR}} \right] \\ &= \underbrace{\left[\frac{\partial \xi_i}{\partial x_j}(p; t) \cdot \frac{\partial \xi_i}{\partial x_k}(p; t) \right]}_{A_{jk}(p; t)} \left[\frac{v_j^I \cdot v_k^{II}}{(1 + \lambda_{pQ})(1 + \lambda_{pR})} \right] \end{aligned}$$

وبالتالي نجد:

$$(1 + \lambda_{pQ}) \cdot (1 + \lambda_{pR}) \cdot v_i^{*I} \cdot v_i^{*II} = A_{jk}(p; t) \cdot v_j^I \cdot v_k^{II} \quad \dots\dots\dots (3)$$

وبما أن:

$$e_{jk}(p; t) = \frac{1}{2} [A_{jk}(p; t) - \delta_{jk}] \Rightarrow A_{jk}(p; t) = \delta_{jk} + 2e_{jk}(p; t)$$

فبالتعويض في (3) نجد:

$$\begin{aligned} (1 + \lambda_{pQ}) \cdot (1 + \lambda_{pR}) \cdot v_i^{*I} \cdot v_i^{*II} &= [\delta_{jk} + 2e_{jk}(p; t)] \cdot v_j^I \cdot v_k^{II} \\ &= [\delta_{jk} \cdot v_j^I \cdot v_k^{II} + 2e_{jk}(p; t) \cdot v_j^I \cdot v_k^{II}] \\ &= v_i^I \cdot v_i^{II} + 2e_{jk}(p; t) \cdot v_j^I \cdot v_k^{II} \end{aligned}$$

وبما أن:

$$v_i^I \cdot v_i^{II} = \cos[\varphi(I, II)] \quad \wedge \quad v_i^{*I} \cdot v_i^{*II} = \cos[\varphi^*(I, II)]$$

عندئذٍ بالتعويض في العلاقة السابقة نحصل على:

$$(1 + \lambda_{pQ}) \cdot (1 + \lambda_{pR}) \cdot \cos[\varphi^*(I, II)] = \cos[\varphi(I, II)] + 2e_{jk}(p; t) \cdot v_j^I \cdot v_k^{II}$$

وهو المطلوب.

تعريف 1:

ندعو الزاوية $\varphi(I, II) := (\widehat{d\vec{S}_0^I, d\vec{S}_0^{II}})$ بالزاوية اللاگرانجية في النقطة اللاگرانجية

p ، بين الاتجاه I الممثل بـ $\vec{dS}_0^I$ والاتجاه II الممثل بـ $\vec{dS}_0^{II}$.

كما ندعو الزاوية $\varphi^*(I, II) := (\widehat{d\vec{S}^I, d\vec{S}^{II}})$ بالزاوية الأولرية في النقطة الأولرية p'

واللحظة $t > 0$ ، وذلك بين الاتجاه I الممثل بـ $\vec{dS}_0^I$ والاتجاه II الممثل بـ $\vec{dS}_0^{II}$.

أو ندعوا $\varphi^*(I, II) := (\widehat{d\vec{S}^I, d\vec{S}^{II}})$ بزاوية التشوه في النقطة p واللحظة $t > 0$ ، بين

الاتجاه I الممثل بـ $\vec{dS}_0^I$ والاتجاه II الممثل بـ $\vec{dS}_0^{II}$.

حالة خاصة من المبرهنة السابقة:

إذا كانت لدينا محافظة بالطول في النقطة p واللحظة $t > 0$ ، للعنصر الخطي اللاغرانجي $\overrightarrow{dS_0^I}$ ، عندئذ يكون $\lambda_{pQ} = 0$.

وإذا كانت لدينا محافظة بالطول في النقطة p واللحظة $t > 0$ ، للعنصر الخطي اللاغرانجي $\overrightarrow{dS_0^{II}}$ ، عندئذ يكون $\lambda_{pR} = 0$.

وعندئذ تصبح العلاقة الموجودة في المبرهنة بالشكل:

$$\cos[\varphi^*(I, II)] = \cos[\varphi(I, II)] + 2e_{jk}(p; t) \cdot v_j^I \cdot v_k^{II}$$

أي أن الأطوال بقيت محافظة، والتشوه بقي في الزوايا فقط.

انتهت المحاضرة.

بنامريخ 7 11 2010 .



جامعة البعث.

كلية العلوم.

قسم الرياضيات.

السنة الرابعة (ميكانيك).

علم المرونة

القسم النظري

المحاضرة السادسة عشر

المعنى الهندسي للعناصر: $e_{jk}(p;t) ; j \neq k$ في مصفوفة الانفعالات اللاغرانجية:

سندرس الآن المعنى الهندسي للعناصر: $e_{jk}(p;t) ; j \neq k$ ، وهي العناصر فوق وتحت القطر الرئيسي في مصفوفة الانفعالات اللاغرانجية.

من أجل ذلك لنأخذ:

$$d\vec{S}_0^{(1)} = \overrightarrow{pQ} = dx_1 \vec{e}_1 ; \quad p \equiv (x_1, x_2, x_3) , \quad dx_1 > 0$$

عندئذ تكون جيوب تمام توجيه $d\vec{S}_0^{(1)}$ هي: $v_i^{(1)} = \delta_{1i}$.
ويكون العنصر الخطي الأولري الموافق في اللحظة $t > 0$ هو:

$$d\vec{S}^{(1)} = \overrightarrow{p'Q'} ; \quad p' \equiv (\xi_1, \xi_2, \xi_3).$$

والذي تكون جيوب تمام توجيهه هي $v_i^{*(1)}$. كما يكون:

$$\lambda_{11} = \frac{dS^{(1)} - dS_0^{(1)}}{dS_0^{(1)}}$$

ولنأخذ أيضاً:

$$d\vec{S}_0^{(2)} = \overrightarrow{pR} = dx_2 \vec{e}_2 ; \quad p \equiv (x_1, x_2, x_3) , \quad dx_2 > 0$$

عندئذ تكون جيوب تمام توجيه $d\vec{S}_0^{(2)}$ هي: $v_i^{(2)} = \delta_{2i}$.
ويكون العنصر الخطي الأولري الموافق في اللحظة $t > 0$ هو:

$$d\vec{S}^{(2)} = \overrightarrow{p'R'} ; \quad p' \equiv (\xi_1, \xi_2, \xi_3).$$

والذي تكون جيوب تمام توجيهه هي $v_i^{*(2)}$. كما يكون:

$$\lambda_{22} = \frac{dS^{(2)} - dS_0^{(2)}}{dS_0^{(2)}}$$

كما يكون عندئذ:

$$\varphi^*(1,2) := \left(d\vec{S}^{(1)} \wedge d\vec{S}^{(2)} \right) , \quad \varphi(1,2) := \left(d\vec{S}_0^{(1)} \wedge d\vec{S}_0^{(2)} \right) = \frac{\pi}{2}$$

إن المبرهنة السابقة صحيحة من أجل أي عنصرين خطيين لاغرانجيين $\overrightarrow{dS_0^I}$ و $\overrightarrow{dS_0^{II}}$ بدايتهما النقطة p .

وبالتالي ستبقى هذه المبرهنة صحيحة من أجل العنصرين الخطيين اللاغرانجيين $\overrightarrow{dS_0^{(1)}}$ و $\overrightarrow{dS_0^{(2)}}$. عندئذ بتطبيق المبرهنة، نجد:

$$(1 + \lambda_{11}).(1 + \lambda_{22}).\cos[\varphi^*(1,2)] = \cos\frac{\pi}{2} + 2e_{jk}(p;t).v_j^{(1)}.v_k^{(2)} \Rightarrow$$

$$(1 + \lambda_{11}).(1 + \lambda_{22}).\cos[\varphi^*(1,2)] = 2e_{jk}(p;t).\delta_{1j}.\delta_{2k} = 2e_{12}(p;t) \Rightarrow$$

$$\cos[\varphi^*(1,2)] = \frac{2e_{12}(p;t)}{(1 + \lambda_{11}).(1 + \lambda_{22})} \quad \dots\dots\dots (1)$$

نسمي $\varphi^*(1,2)$ بالزاوية الأولرية أو زاوية التشوه ما بين الاتجاهين 1 و 2 ، في النقطة p واللحظة $t > 0$.
من (1) ينتج لدينا:

$$-1 \leq \frac{2e_{12}(p;t)}{(1 + \lambda_{11}).(1 + \lambda_{22})} \leq 1 \quad \Leftrightarrow$$

$$-\frac{1}{2}(1 + \lambda_{11}).(1 + \lambda_{22}) \leq e_{12}(p;t) \leq \frac{1}{2}(1 + \lambda_{11}).(1 + \lambda_{22}) \quad \dots\dots\dots (2)$$

وبما أن:

$$\lambda_{11} = -1 + \sqrt{1 + 2e_{11}(p;t)} \quad , \quad \lambda_{22} = -1 + \sqrt{1 + 2e_{22}(p;t)}$$

عندئذ تصبح العلاقتين (1) و (2) بالشكل:

$$\cos[\varphi^*(1,2)] = \frac{2e_{12}(p;t)}{\sqrt{1 + 2e_{11}(p;t)}.\sqrt{1 + 2e_{22}(p;t)}}.$$

$$-\frac{1}{2}\sqrt{1 + e_{11}(p;t)}.\sqrt{1 + e_{22}(p;t)} \leq e_{12}(p;t) \leq \frac{1}{2}\sqrt{1 + e_{11}(p;t)}.\sqrt{1 + e_{22}(p;t)}$$

ومنه المعنى الهندسي التالي لـ $e_{12}(p;t)$:

إذا كان: $\lambda_{11} = 0$, $\lambda_{22} = 0$, (أي لدينا محافظة نسبية باتجاه كل من المحورين $\overrightarrow{Ox_1}$, $\overrightarrow{Ox_2}$ ، في النقطة p واللحظة $t > 0$). عندئذ تصبح (1) و (2) بالشكل:

$$\cos[\varphi^*(1,2)] = 2e_{12}(p;t) \Rightarrow e_{12}(p;t) = \frac{1}{2} \cos[\varphi^*(1,2)].$$

$$-\frac{1}{2} \leq e_{12}(p;t) \leq \frac{1}{2}$$

وبالتالي يمكن صياغة المعنى الهندسي لـ $e_{12}(p;t)$ كما يلي:
إذا كانت لدينا محافظة نسبية باتجاه كل من المحورين $\overrightarrow{Ox_1}$, $\overrightarrow{Ox_2}$ ، في النقطة p واللحظة $t > 0$ ، فإن $e_{12}(p;t)$ يمثل نصف جيب تمام (تجيب) زاوية التشوه ما بين الاتجاهين 1 , 2 في النقطة p واللحظة $t > 0$.

ملاحظة 1:

بما أن مصفوفة الانفعالات اللاغرانجية متناظرة، عندئذ يكون: $e_{12}(p;t) = e_{21}(p;t)$.
وبالتالي ما ينطبق على $e_{12}(p;t)$ ينطبق أيضاً على $e_{21}(p;t)$.

بشكل مماثل لما سبق سندرس المعنى الهندسي لـ $e_{13}(p;t)$ وهو نفسه المعنى الهندسي لـ $e_{31}(p;t)$.

فمن أجل العنصر الخطي اللاغرانجي $dS_0^{(1)}$ والعنصر الخطي اللاغرانجي $dS_0^{(3)}$ المعروف بالشكل:

$$d\overrightarrow{S_0^{(3)}} = \overrightarrow{pR} = dx_3 \overrightarrow{e_3} \quad ; \quad p \equiv (x_1, x_2, x_3) \quad , \quad dx_3 > 0$$

والذي جيوب تمام توجيهه هي: $v_i^{(3)} = \delta_{3i}$.
والعنصر الخطي الأولري الموافق له، في اللحظة $t > 0$ هو:

$$d\overrightarrow{S}^{(3)} = \overrightarrow{p'R'} \quad ; \quad p' \equiv (\xi_1, \xi_2, \xi_3).$$

والذي تكون جيوب تمام توجيهه هي $v_i^{*(3)}$. كما يكون من أجل $d\overrightarrow{S_0^{(3)}}$

$$\lambda_{33} = \frac{dS^{(3)} - dS_0^{(3)}}{dS_0^{(3)}}$$

وتكون:

$$\varphi^*(1,3) := \left(d\vec{S}^{(1)} \wedge d\vec{S}^{(3)} \right) , \quad \varphi(1,3) := \left(d\vec{S}_0^{(1)} \wedge d\vec{S}_0^{(3)} \right) = \frac{\pi}{2}$$

عندئذ بتطبيق المبرهنة السابقة في هذه الحالة، نجد:

$$(1 + \lambda_{11}) \cdot (1 + \lambda_{33}) \cdot \cos \left[\varphi^*(1,3) \right] = \cos \frac{\pi}{2} + 2e_{jk}(p;t) \cdot v_j^{(1)} \cdot v_k^{(3)} \Rightarrow$$

$$(1 + \lambda_{11}) \cdot (1 + \lambda_{33}) \cdot \cos \left[\varphi^*(1,3) \right] = 2e_{jk}(p;t) \cdot \delta_{1j} \cdot \delta_{3k} = 2e_{13}(p;t) \Rightarrow$$

$$\cos \left[\varphi^*(1,3) \right] = \frac{2e_{13}(p;t)}{(1 + \lambda_{11}) \cdot (1 + \lambda_{33})} \quad \dots\dots\dots (3)$$

ندعو $\varphi^*(1,3)$ بالزاوية الأولرية أو زاوية التشوه ما بين الاتجاهين 1 و 3 ، في النقطة p واللحظة $t > 0$.

من (3) ينتج لدينا:

$$-1 \leq \frac{2e_{13}(p;t)}{(1 + \lambda_{11}) \cdot (1 + \lambda_{33})} \leq 1 \quad \Leftrightarrow$$

$$-\frac{1}{2}(1 + \lambda_{11}) \cdot (1 + \lambda_{33}) \leq e_{13}(p;t) \leq \frac{1}{2}(1 + \lambda_{11}) \cdot (1 + \lambda_{33}) \quad \dots\dots\dots (4)$$

وبما أن:

$$\lambda_{11} = -1 + \sqrt{1 + 2e_{11}(p;t)} \quad , \quad \lambda_{33} = -1 + \sqrt{1 + 2e_{33}(p;t)}$$

عندئذ تصبح العلاقتين (3) و (4) بالشكل:

$$\cos \left[\varphi^*(1,3) \right] = \frac{2e_{13}(p;t)}{\sqrt{1 + 2e_{11}(p;t)} \cdot \sqrt{1 + 2e_{33}(p;t)}} .$$

$$-\frac{1}{2} \sqrt{1 + e_{11}(p;t)} \cdot \sqrt{1 + e_{33}(p;t)} \leq e_{13}(p;t) \leq \frac{1}{2} \sqrt{1 + e_{11}(p;t)} \cdot \sqrt{1 + e_{33}(p;t)}$$

ومنه المعنى الهندسي التالي لـ $e_{13}(p;t)$:

إذا كان: $\lambda_{11} = 0$ (والذي يكافئ تحقق: $e_{11}(p; t) = 0$)، وكان: $\lambda_{33} = 0$ (والذي يكافئ تحقق: $e_{33}(p; t) = 0$)؛ (أي لدينا محافظة نسبية باتجاه كل من المحورين $\overrightarrow{Ox_1}, \overrightarrow{Ox_3}$ ، في النقطة p واللحظة $t > 0$). عندئذ تصبح (3) و (4) بالشكل:

$$\cos[\varphi^*(1,3)] = 2e_{13}(p; t) \Rightarrow e_{13}(p; t) = \frac{1}{2} \cos[\varphi^*(1,3)].$$

$$-\frac{1}{2} \leq e_{13}(p; t) \leq \frac{1}{2}$$

وبالتالي يمكن صياغة المعنى الهندسي لـ $e_{13}(p; t)$ كما يلي:
إذا كانت لدينا محافظة نسبية باتجاه كل من المحورين $\overrightarrow{Ox_1}, \overrightarrow{Ox_3}$ ، في النقطة p واللحظة $t > 0$ ، فإن $e_{13}(p; t)$ يمثل نصف جيب تمام (تجيب) زاوية التشوه ما بين الاتجاهين 1, 3 في النقطة p واللحظة $t > 0$.

ملاحظة 2:

بما أن مصفوفة الانفعالات اللاغرانجية متناظرة، عندئذ يكون: $e_{13}(p; t) = e_{31}(p; t)$. وبالتالي ما ينطبق على $e_{13}(p; t)$ ينطبق أيضاً على $e_{31}(p; t)$.

بشكل مماثل لما سبق سندرس المعنى الهندسي لـ $e_{23}(p; t)$ وهو نفسه المعنى الهندسي لـ $e_{32}(p; t)$.

فمن أجل العنصر الخطي اللاغرانجي $d\overrightarrow{S_0}^{(2)}$ والعنصر الخطي اللاغرانجي $d\overrightarrow{S_0}^{(3)}$ ، حيث:

$$d\overrightarrow{S_0}^{(2)} = dx_2 \overrightarrow{e_2} \quad ; \quad dx_2 > 0.$$

$$d\overrightarrow{S_0}^{(3)} = dx_3 \overrightarrow{e_3} \quad ; \quad dx_3 > 0.$$

تكون:

$$\varphi^*(2,3) := \left(d\overrightarrow{S_0}^{(2)}, d\overrightarrow{S_0}^{(3)} \right) \quad , \quad \varphi(2,3) := \left(d\overrightarrow{S_0}^{(2)}, d\overrightarrow{S_0}^{(3)} \right) = \frac{\pi}{2}$$

عندئذ بتطبيق المبرهنة السابقة في هذه الحالة نجد:

$$(1 + \lambda_{22}).(1 + \lambda_{33}).\cos[\varphi^*(2,3)] = \cos\frac{\pi}{2} + 2e_{jk}(p;t).v_j^{(2)}.v_k^{(3)} \Rightarrow$$

$$(1 + \lambda_{22}).(1 + \lambda_{33}).\cos[\varphi^*(2,3)] = 2e_{jk}(p;t).\delta_{2j}.\delta_{3k} = 2e_{23}(p;t) \Rightarrow$$

$$\cos[\varphi^*(2,3)] = \frac{2e_{23}(p;t)}{(1 + \lambda_{22}).(1 + \lambda_{33})} \quad \dots\dots\dots (5)$$

ندعو $\varphi^*(2,3)$ بالزاوية الأولرية أو زاوية التشوه ما بين الاتجاهين 2 و 3 ، في النقطة p واللحظة $t > 0$.
من (5) ينتج لدينا:

$$-1 \leq \frac{2e_{23}(p;t)}{(1 + \lambda_{22}).(1 + \lambda_{33})} \leq 1 \quad \Leftrightarrow$$

$$-\frac{1}{2}(1 + \lambda_{22}).(1 + \lambda_{33}) \leq e_{23}(p;t) \leq \frac{1}{2}(1 + \lambda_{22}).(1 + \lambda_{33}) \quad \dots\dots\dots (6)$$

وبما أن:

$$\lambda_{22} = -1 + \sqrt{1 + 2e_{22}(p;t)} \quad , \quad \lambda_{33} = -1 + \sqrt{1 + 2e_{33}(p;t)}$$

عندئذ تصبح العلاقتين (5) و (6) بالشكل:

$$\cos[\varphi^*(2,3)] = \frac{2e_{23}(p;t)}{\sqrt{1 + 2e_{22}(p;t)}.\sqrt{1 + 2e_{33}(p;t)}}.$$

$$-\frac{1}{2}\sqrt{1 + e_{22}(p;t)}.\sqrt{1 + e_{33}(p;t)} \leq e_{23}(p;t) \leq \frac{1}{2}\sqrt{1 + e_{22}(p;t)}.\sqrt{1 + e_{33}(p;t)}$$

ومنه المعنى الهندسي التالي لـ $e_{23}(p;t)$:

إذا كان: $\lambda_{22} = 0$ (والذي يكافئ تحقق: $e_{22}(p;t) = 0$) ، وكان: $\lambda_{33} = 0$ (والذي يكافئ تحقق: $e_{33}(p;t) = 0$) ؛ (أي لدينا محافظة نسبية باتجاه كل من المحورين Ox_2 , Ox_3 ، في النقطة p واللحظة $t > 0$). عندئذ تصبح (5) و (6) بالشكل:

$$\cos[\varphi^*(2,3)] = 2e_{23}(p;t) \Rightarrow e_{23}(p;t) = \frac{1}{2} \cos[\varphi^*(2,3)].$$

$$-\frac{1}{2} \leq e_{23}(p;t) \leq \frac{1}{2}$$

وبالتالي يمكن صياغة المعنى الهندسي لـ $e_{23}(p;t)$ كما يلي:
إذا كانت لدينا محافظة نسبية باتجاه كل من المحورين $\overrightarrow{Ox_2}, \overrightarrow{Ox_3}$ ، في النقطة p واللحظة $t > 0$ ، فإن $e_{23}(p;t)$ يمثل نصف جيب تمام (تجيب) زاوية التشوه ما بين الاتجاهين 3 , 2 في النقطة p واللحظة $t > 0$.

ملاحظة 3:

بما أن مصفوفة الانفعالات اللاغرانجية متناظرة، عندئذ يكون: $e_{23}(p;t) = e_{32}(p;t)$.
وبالتالي ما ينطبق على $e_{23}(p;t)$ ينطبق أيضاً على $e_{32}(p;t)$.

انتهت المحاضرة .

بنامريخ 9 11 2010 .



جامعة البعث.

كلية العلوم.

قسم الرياضيات.

السنة الرابعة (ميكانيك).

علم المرونة

القسم النظري

المحاضرة السابعة عشر

تمرين 1:

لنضع: $\underline{1} = (1,0,0)$, $\underline{2} = (0,1,0)$, $\underline{3} = (0,0,1)$. أي أن $\underline{i}$ هي الثلاثية التي تكون كافة عناصرها أصفار باستثناء العنصر i فيساوي 1. والمطلوب: أثبت أن:

$$e_{ijk} = \begin{vmatrix} \underline{i} \\ \underline{j} \\ \underline{k} \end{vmatrix} ; \quad i, j, k = 1, 2, 3 \quad \dots (*)$$

الإثبات:

نميز الحالتين التاليتين:

(1) إذا تساوى دليلين على الأقل من الدلائل i, j, k عندئذٍ:
من جهة أولى تكون قيمة المعين معدومة لتساوي سطرين فيه.
ومن جهة ثانية تكون قيمة مناوب ليفي تشيفيتي معدومة لتساوي دليلين من دلائله.
وبالتالي تكون العلاقة (*) محققة.

(2) إذا كانت (i, j, k) تبديلة زوجية، عندئذٍ تكون قيمة المعين مساوية لـ 1 ؛ لأنه ينتج عن المعين الواحد بعد إجراء عدد زوجي من التبديلات على أسطره. وكذلك تكون قيمة مناوب ليفي تشيفيتي مساوية لـ 1 بحسب تعريفه. ومنه فالعلاقة (*) تكون محققة.

أما إذا كانت (i, j, k) تبديلة فردية، فعندئذٍ ستكون قيمة المعين مساوية لـ -1 ؛ لأنه سينتج عن المعين الواحد بإجراء عدد فردي من التبديلات على أسطره. وكذلك قيمة مناوب ليفي تشيفيتي أيضاً ستساوي -1 وذلك بحسب تعريفه. ومنه فالعلاقة (*) محققة أيضاً في هذه الحالة.

مما سبق نجد أن العلاقة (*) تكون محققة وذلك: $\forall i, j, k = 1, 2, 3$.

نتيجة 1:

$$\underline{1} = (1,0,0) = (\delta_{11}, \delta_{12}, \delta_{13})$$

$$\underline{2} = (0,1,0) = (\delta_{21}, \delta_{22}, \delta_{23})$$

$$\underline{3} = (0,0,1) = (\delta_{31}, \delta_{32}, \delta_{33})$$

ومنه:

$$\underline{i} = (\delta_{i1}, \delta_{i2}, \delta_{i3}) , \quad \underline{j} = (\delta_{j1}, \delta_{j2}, \delta_{j3}) , \quad \underline{k} = (\delta_{k1}, \delta_{k2}, \delta_{k3})$$

فبحسب التمرين السابق نكتب:

$$e_{ijk} = \begin{vmatrix} \delta_{i1} & \delta_{i2} & \delta_{i3} \\ \delta_{j1} & \delta_{j2} & \delta_{j3} \\ \delta_{k1} & \delta_{k2} & \delta_{k3} \end{vmatrix} ; \quad \forall i, j, k = 1, 2, 3$$

تمرين: (وظيفة).

أثبت أن:

$$e_{ijk} \cdot e_{mnl} = \begin{vmatrix} \delta_{im} & \delta_{in} & \delta_{il} \\ \delta_{jm} & \delta_{jn} & \delta_{jl} \\ \delta_{km} & \delta_{kn} & \delta_{kl} \end{vmatrix} ; \quad \forall i, j, k, m, n, l = 1, 2, 3$$

(فكرة الحل: نأخذ معين e_{ijk} ومنقول معين e_{mnl} ثم نضربهما ببعض، ومن ثم نجري خاصية التصفية).

انتهت المحاضرة.

بنامريخ 11 11 2010 .



جامعة البعث.

كلية العلوم.

قسم الرياضيات.

السنة الرابعة (ميكانيك).

علم المرونة

القسم النظري

المحاضرة الثامنة عشر

وجدنا في محاضرة سابقة أن:

$$\begin{aligned}\cos[\varphi^*(1,2)] &= \frac{2e_{12}(p;t)}{(1+\lambda_{11})(1+\lambda_{22})} \\ &= \frac{2e_{12}(p;t)}{\sqrt{1+2e_{11}(p;t)} \cdot \sqrt{1+2e_{22}(p;t)}} \quad \dots\dots (1)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos[\varphi^*(1,3)] &= \frac{2e_{13}(p;t)}{(1+\lambda_{11})(1+\lambda_{33})} \\ &= \frac{2e_{13}(p;t)}{\sqrt{1+2e_{11}(p;t)} \cdot \sqrt{1+2e_{33}(p;t)}} \quad \dots\dots (2)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos[\varphi^*(2,3)] &= \frac{2e_{23}(p;t)}{(1+\lambda_{22})(1+\lambda_{33})} \\ &= \frac{2e_{23}(p;t)}{\sqrt{1+2e_{22}(p;t)} \cdot \sqrt{1+2e_{33}(p;t)}} \quad \dots\dots (3)\end{aligned}$$

أولاً: من أجل العلاقة (1) ، نميز الحالات الثلاث التالية:

$$0 < e_{12}(p;t) \leq \frac{1}{2}(1+\lambda_{11})(1+\lambda_{22}) \quad (1)$$

عندئذ نقول أنه لدينا تشوه حاد في الزاوية في اللحظة $t > 0$ والنقطة p ، وذلك بين الاتجاهين 1 ، 2 .

$$e_{12}(p;t) = 0 \quad (2)$$

عندئذ نقول أنه لدينا محافظة على الزاوية في اللحظة $t > 0$ والنقطة p ، وذلك بين الاتجاهين 1 ، 2 .

$$-\frac{1}{2}(1+\lambda_{11})(1+\lambda_{22}) \leq e_{12}(p;t) < 0 \quad (3)$$

عندئذ نقول أنه لدينا تشوه منفرج في الزاوية في اللحظة $t > 0$ والنقطة p ، وذلك بين الاتجاهين 1 ، 2 .

ثانياً: من أجل العلاقة (2) ، نميز الحالات الثلاث التالية:

$$(1) \quad 0 < e_{13}(p; t) \leq \frac{1}{2}(1 + \lambda_{11})(1 + \lambda_{33})$$

عندئذ نقول أنه لدينا تشوه حاد في الزاوية في اللحظة $t > 0$ والنقطة p ، وذلك بين الاتجاهين 1 , 3 .

$$(2) \quad e_{13}(p; t) = 0$$

عندئذ نقول أنه لدينا محافظة على الزاوية في اللحظة $t > 0$ والنقطة p ، وذلك بين الاتجاهين 1 , 3 .

$$(3) \quad -\frac{1}{2}(1 + \lambda_{11})(1 + \lambda_{33}) \leq e_{13}(p; t) < 0$$

عندئذ نقول أنه لدينا تشوه منفرج في الزاوية في اللحظة $t > 0$ والنقطة p ، وذلك بين الاتجاهين 1 , 3 .

ثالثاً: من أجل العلاقة (3) ، نميز الحالات الثلاث التالية:

$$(1) \quad 0 < e_{23}(p; t) \leq \frac{1}{2}(1 + \lambda_{22})(1 + \lambda_{33})$$

عندئذ نقول أنه لدينا تشوه حاد في الزاوية في اللحظة $t > 0$ والنقطة p ، وذلك بين الاتجاهين 2 , 3 .

$$(2) \quad e_{23}(p; t) = 0$$

عندئذ نقول أنه لدينا محافظة على الزاوية في اللحظة $t > 0$ والنقطة p ، وذلك بين الاتجاهين 2 , 3 .

$$(3) \quad -\frac{1}{2}(1 + \lambda_{22})(1 + \lambda_{33}) \leq e_{23}(p; t) < 0$$

عندئذ نقول أنه لدينا تشوه منفرج في الزاوية في اللحظة $t > 0$ والنقطة p ، وذلك بين الاتجاهين 2 , 3 .

مثال 1:

ليكن لدينا وسطاً مادياً مستمراً، في لحظة ما $t_1 > 0$ ونقطة ما p_1 لاغرانجية. نفرض أن قيمة مصفوفة الانفعالات اللاغرانجية هي:

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{7} & -\frac{1}{9} \\ \frac{1}{7} & 0 & \frac{1}{11} \\ -\frac{1}{9} & \frac{1}{11} & -\frac{1}{8} \end{pmatrix}$$

والمطلوب إيجاد المعنى الهندسي لمصفوفة الانفعالات اللاغرانجية المعطاة.

الحل:

لدينا: $e_{11}(p_1; t_1) = e_{22}(p_1; t_1) = 0$. وبالتالي لدينا محافظة نسبية في اللحظة $t_1 > 0$ والنقطة p_1 ، باتجاه كل من المحورين $\overrightarrow{Ox_1}$ ، $\overrightarrow{Ox_2}$.

ولدينا: $-\frac{1}{2} < e_{33}(p_1; t_1) = -\frac{1}{8} < 0$. وبالتالي لدينا تقلص نسبي في اللحظة $t_1 > 0$ والنقطة p_1 ، باتجاه المحور $\overrightarrow{Ox_3}$.

$$\text{لدينا: } 0 < \cos(\varphi^*(1, 2)) = \frac{2e_{12}(p_1; t_1)}{\sqrt{1+2e_{11}(p_1; t_1)} \cdot \sqrt{1+2e_{22}(p_1; t_1)}} = \frac{2}{7} < 1$$

وبالتالي فلدينا تشوه حاد في الزاوية في اللحظة $t_1 > 0$ والنقطة p_1 ، بين الاتجاهين 1، 2.

$$\text{وكذلك لدينا: } -1 < \cos(\varphi^*(1, 3)) = \frac{2e_{13}(p_1; t_1)}{\sqrt{1+2e_{11}(p_1; t_1)} \cdot \sqrt{1+2e_{33}(p_1; t_1)}} = \frac{-4\sqrt{3}}{9} < 0$$

وبالتالي فلدينا تشوه منفرج في الزاوية في اللحظة $t_1 > 0$ والنقطة p_1 ، بين الاتجاهين 1، 3.

(يطلب مناقشة الحالة الأخيرة (حالة $e_{23}(p_1; t_1)$).

تعريف 1:

نسمي المجموعة:

$$W(p; t) := \left\{ \lambda_{11}, \lambda_{22}, \lambda_{33}, \cos(\varphi^*(1, 2)), \cos(\varphi^*(1, 3)), \cos(\varphi^*(2, 3)) \right\}$$

تشوهاً لاغرانجياً للوسط المادي المستمر في النقطة p واللحظة $t > 0$.**مقدمة جبرية:**لتكن لدينا مصفوفة الأعداد الحقيقية: $A = \{a_{ij}\}_{3 \times 3}$ ، ولنأخذ مصفوفة جزئها التناظري:

$$\alpha = \{\alpha_{ij}\}_{3 \times 3} \text{ (عناصر هذه المصفوفة لها الشكل: } \alpha_{ij} = \frac{1}{2}(a_{ij} + a_{ji}) ; i, j = 1, 2, 3 \text{).}$$

نسمي التطبيق:

$$I: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R} ; I(x_1, x_2, x_3) = a_{ij} x_i x_j.$$

نسميه شكلاً تربيعياً، مصفوفته هي المصفوفة α .**نتيجة 1:**

لدينا:

$$\begin{aligned} I(x_1, x_2, x_3) &= a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 \\ &\quad + (a_{12} + a_{21})x_1x_2 + (a_{13} + a_{31})x_1x_3 + (a_{23} + a_{32})x_2x_3 \\ &= \alpha_{11}x_1^2 + \alpha_{22}x_2^2 + \alpha_{33}x_3^2 + 2\alpha_{12}x_1x_2 + 2\alpha_{13}x_1x_3 + 2\alpha_{23}x_2x_3. \end{aligned}$$

نتيجة 2:إذا كانت المصفوفة $A = \{a_{ij}\}_{3 \times 3}$ متناظرة عكسياً؛ أي أن:

$$a_{ij} = -a_{ji} ; \forall i, j = 1, 2, 3$$

عندئذٍ يكون الشكل التربيعي:

$$I(x_1, x_2, x_3) = 0 ; \forall (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$$

مبرهنة 1: (بدون برهان).

يكون الشكل التربيعي I هو الشكل التربيعي الصفري، إذا وفقط إذا كانت: $\alpha_{3 \times 3} = 0_{3 \times 3}$.

ملاحظة 1:

لنضع: $S(0,1) := \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 ; x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$. عندئذٍ يتحقق لدينا:

$$\left. \begin{array}{l} I(x_1, x_2, x_3) = 0; \\ \forall (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} I(x_1, x_2, x_3) = 0; \\ \forall (x_1, x_2, x_3) \in S(0,1) \end{array} \right.$$

(برهان هذا التكافؤ يكافئ برهان النظرية السابقة).

تعريف 2:

نقول عن الوسط المادي المستمر أنه يتصرف تصرف الجسم القاسي في اللحظة $t > 0$ على جوار للنقطة p ، إذا وفقط إذا تحقق الشرط التالي: $\lambda_{pQ} = 0$ ، وذلك من أجل أي نقطة Q قريبة من النقطة p .
ومنه المبرهنة التالية.

مبرهنة 2:

الشرط اللازم والكافي حتى يتصرف الوسط المادي المستمر تصرف الجسم القاسي في اللحظة $t > 0$ على جوار ما للنقطة p ، هو أن يتحقق الشرط التالي:

$$e_{ij}(p;t) = 0 ; \forall i, j = 1, 2, 3 \quad \dots\dots\dots (*)$$

البرهان:

$$\text{نعلم أن: } (*)' \dots\dots\dots \lambda_{pQ} \left(1 + \frac{1}{2} \lambda_{pQ} \right) = e_{jk}(p;t) v_j v_k$$

كفاية الشرط: →

نفرض أن الشرط (*) محقق ولنثبت أن الوسط يتصرف تصرف الجسم القاسي في اللحظة $t > 0$ على جوار للنقطة p .

نعوض (*) في (*) فنجد:

$$\lambda_{pQ} \left(1 + \frac{1}{2} \lambda_{pQ} \right) = 0$$

وبالتالي:

إمّا: $\lambda_{pQ} = 0$ وهذا الحل مقبول.

أو: $\lambda_{pQ} = -2$ وهذا الحل مرفوض، لأنه كما نعلم فإن $\lambda_{pQ} > -1$ دوماً.

وبالتالي: $\lambda_{pQ} = 0$ ، وبما أن Q اختيارية بحيث تبقى قريبة من p ، وبالتالي فإن الوسط يتصرف تصرف الجسم القاسي في اللحظة $t > 0$ على جوار للنقطة p .

انتهت المحاضرة.

بناريخ 21 11 2010 .



جامعة البعث.

كلية العلوم.

قسم الرياضيات.

السنة الرابعة (ميكانيك).

علم المرونة

القسم النظري

المحاضرة التاسعة عشر

نتابع برهان المبرهنة الأخيرة من المحاضرة السابقة:

لزوم الشرط:

نفرض أن الوسط المادي المستمر يتصرف تصرف الجسم القاسي في اللحظة $t > 0$ على جوار للنقطة p ، ولنثبت تحقق الشرط (*) المعطى:

$$e_{ij}(p;t)=0 ; \forall i, j=1,2,3 \quad \dots\dots (*)$$

بما أن الوسط المادي المستمر يتصرف تصرف الجسم القاسي في اللحظة $t > 0$ على جوار للنقطة، فبحسب التعريف يكون: $\lambda_{pQ} = 0$ مهما تكن Q قريبة على p . بالتعويض في العلاقة (*) نجد:

$$e_{jk}(p;t).v_j.v_k = 0 ; \forall (v_1, v_2, v_3); v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow$$

$$e_{jk}(p;t)=0 ; \forall (v_1, v_2, v_3) \in S(O,1)$$

$$\Leftrightarrow$$

$$I(v_1, v_2, v_3)=0 ; \forall (v_1, v_2, v_3) \in S(O,1)$$

$$\Leftrightarrow$$

$$I(v_1, v_2, v_3)=0 ; \forall (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3$$

$$\Leftrightarrow$$

$$e_{jk}(p;t)=0 ; \forall j, k = 1,2,3.$$

أي أن الشرط (*) محقق، وهو المطلوب إثباته.

تعريف 1:

نقول عن وسط مادي مستمر أنه يتصرف تصرف الجسم القاسي إذا وفقط إذا تحقق الشرط التالي:

من أجل كل $t > 0$ وكل p نقطة لاغرانجية، فإن الوسط المادي المستمر يتصرف تصرف الجسم القاسي على جوار لـ p .

نتيجة 1:

يتصرف الوسط المادي المستمر تصرف الجسم القاسي إذا وفقط إذا تحقق الشرط:

$$\lambda_{pQ} = 0 \quad ; \quad \forall t > 0, \forall p, \forall p \text{ قريبة على } Q$$

نتيجة 2:

يتصرف الوسط المادي المستمر تصرف الجسم القاسي إذا وفقط إذا تحقق الشرط:

$$e_{jk}(p;t) = 0 \quad ; \quad \forall j, k = 1, 2, 3, \forall p \wedge \forall t > 0.$$

مصفوفة الدورانات اللاغرانجية.**تعريف 2:**

لتكن $p \equiv (x_1, x_2, x_3)$ نقطة مادية لاغرانجية من الوسط المادي المستمر، ولنفرض أن النقطة المادية الأولرية الموافقة لها هي $p' \equiv (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$. وجدنا سابقاً أن:

$$\xi_i = \xi_i(p;t) \quad ; \quad i = 1, 2, 3.$$

كما وجدنا أن:

$$u_i = \xi_i(p;t) - x_i \quad ; \quad i = 1, 2, 3.$$

عندئذ نسمي المصفوفة اللاغرانجية $\{\gamma_{ij}(p;t)\}_{3 \times 3}$ والمحقة للشرط:

$$\gamma_{ij}(p;t) + e_{ij}(p;t) = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}(p;t) \quad ; \quad \forall i, j = 1, 2, 3, \forall p, \forall t > 0.$$

بمصفوفة الدورانات اللاغرانجية.

نتيجة 3:

نعلم أن:

$$e_{ij}(p;t) = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u_i}{\partial x_j}(p;t) + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}(p;t) + \frac{\partial u_s}{\partial x_i}(p;t) \cdot \frac{\partial u_s}{\partial x_j}(p;t) \right]$$

وبالتالي:

$$\begin{aligned}
\gamma_{ij}(p;t) &= \frac{\partial u_i}{\partial x_j}(p;t) - e_{ij}(p;t) \\
&= \frac{\partial u_i}{\partial x_j}(p;t) - \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u_i}{\partial x_j}(p;t) + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}(p;t) + \frac{\partial u_s}{\partial x_i}(p;t) \cdot \frac{\partial u_s}{\partial x_j}(p;t) \right] \\
&= \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u_i}{\partial x_j}(p;t) - \frac{\partial u_j}{\partial x_i}(p;t) - \frac{\partial u_s}{\partial x_i}(p;t) \cdot \frac{\partial u_s}{\partial x_j}(p;t) \right]
\end{aligned}$$

نتيجة 4:

ليكن: $\vec{S}_0 = \overrightarrow{pQ}$; $p \equiv (x_1, x_2, x_3) \wedge Q \equiv (x_1 + dx_1, x_2 + dx_2, x_3 + dx_3)$
 عنصراً خطياً لاغرانجياً، ولنفرض أن العنصر الخطي الأولي الموافق هو: $d\vec{S} = \overrightarrow{p'Q'}$
 حيث: $p' = (\xi_1, \xi_2, \xi_3) \wedge Q' = (\xi_1 + d\xi_1, \xi_2 + d\xi_2, \xi_3 + d\xi_3)$ عندئذ:

$$\begin{aligned}
d\vec{S} &= d\xi_i \vec{e}_i, \text{ هذا من جهة أولى، ومن جهة أخرى لدينا: } \xi_i = \xi_i(p;t) ; i=1,2,3. \\
d\xi_i &= \frac{\partial \xi_i}{\partial x_j}(p;t) dx_j \text{ من أجل: } t = \text{const} > 0 \text{ يكون:}
\end{aligned}$$

وبما أن: $\xi_i(p;t) = u_i(p;t) + x_i$; $i=1,2,3$ ، فبالتعويض من العلاقة السابقة نجد:

$$d\xi_i = \left[\frac{\partial u_i}{\partial x_j}(p;t) + \delta_{ij} \right] dx_j$$

$$\text{وبما أن: } \gamma_{ij}(p;t) + e_{ij}(p;t) = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}(p;t) \text{ نحصل على:}$$

$$d\xi_i = \left[\delta_{ij} + \gamma_{ij}(p;t) + e_{ij}(p;t) \right] dx_j$$

ومنه النتيجة التالية:

يتحرك الوسط المادي المستمر بحيث يكون:

δ_{ij} مسؤولة عن الحركة الانسحابية، و $\gamma_{ij}(p;t)$ مسؤولة عن الحركة الدورانية،
 و $e_{ij}(p;t)$ مسؤولة عن التشوهات (الانفعالات).

حالات خاصة:

(1) $e_{ij}(p;t)=0$; $\forall i, j=1,2,3$, $\forall p$, $\forall t > 0$ وفي هذه الحالة يصبح

لدينا: $d\xi_i = [\delta_{ij} + \gamma_{ij}(p;t)] dx_j$ والحركة هنا هي حركة انسحابية بـ δ_{ij} ودورانية بـ $\gamma_{ij}(p;t)$.

وكحالة خاصة، لو كان أيضاً: $\gamma_{ij}(p;t)=0$; $\forall p$, $\forall t > 0$. عندئذٍ يصبح لدينا:

$$d\xi_i = \delta_{ij} dx_j = dx_i$$

و الحركة هي حركة انسحابية لوسط مادي مستمر يتصرف تصرف الجسم القاسي.

(2) $\gamma_{ij}(p;t)=0$; $\forall i, j=1,2,3$, $\forall p$, $\forall t > 0$ وفي هذه الحالة يصبح

لدينا: $d\xi_i = [\delta_{ij} + e_{ij}(p;t)] dx_j$ ، وعندئذٍ يكون لدينا حركة انسحابية بـ δ_{ij} ، وتشوه بـ $e_{ij}(p;t)$.

انتهت المحاضرة.

بنامريخ 23 11 2010 .



جامعة البعث.

كلية العلوم.

قسم الرياضيات.

السنة الرابعة (ميكانيك).

علم المرونة

القسم النظري

المحاضرة العشرية

تمرين : (وظيفة).

أثبت أن:

$$e_{ijk} . e_{lmn} = \begin{vmatrix} \delta_{i\ell} & \delta_{im} & \delta_{in} \\ \delta_{j\ell} & \delta_{jm} & \delta_{jn} \\ \delta_{k\ell} & \delta_{km} & \delta_{kn} \end{vmatrix} ; \quad \forall i, j, k, \ell, m, n = 1, 2, 3$$

الحل:

نعلم أن:

$$e_{ijk} = \begin{vmatrix} \delta_{i1} & \delta_{i2} & \delta_{i3} \\ \delta_{j1} & \delta_{j2} & \delta_{j3} \\ \delta_{k1} & \delta_{k2} & \delta_{k3} \end{vmatrix}$$

$$e_{lmn} = \begin{vmatrix} \delta_{\ell1} & \delta_{\ell2} & \delta_{\ell3} \\ \delta_{m1} & \delta_{m2} & \delta_{m3} \\ \delta_{n1} & \delta_{n2} & \delta_{n3} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \delta_{\ell1} & \delta_{m1} & \delta_{n1} \\ \delta_{\ell2} & \delta_{m2} & \delta_{n2} \\ \delta_{\ell3} & \delta_{m3} & \delta_{n3} \end{vmatrix}$$

 $\Rightarrow$

$$e_{ijk} . e_{lmn} = \begin{vmatrix} \delta_{i1} & \delta_{i2} & \delta_{i3} \\ \delta_{j1} & \delta_{j2} & \delta_{j3} \\ \delta_{k1} & \delta_{k2} & \delta_{k3} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \delta_{\ell1} & \delta_{m1} & \delta_{n1} \\ \delta_{\ell2} & \delta_{m2} & \delta_{n2} \\ \delta_{\ell3} & \delta_{m3} & \delta_{n3} \end{vmatrix} \quad \dots\dots\dots (1)$$

لنضع الآن:

$$A = \begin{pmatrix} \delta_{i1} & \delta_{i2} & \delta_{i3} \\ \delta_{j1} & \delta_{j2} & \delta_{j3} \\ \delta_{k1} & \delta_{k2} & \delta_{k3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \delta_{\ell1} & \delta_{m1} & \delta_{n1} \\ \delta_{\ell2} & \delta_{m2} & \delta_{n2} \\ \delta_{\ell3} & \delta_{m3} & \delta_{n3} \end{pmatrix}$$

 $\Rightarrow$

$$|A| = e_{ijk} . e_{lmn}$$

وبالتالي يتوقف المطلوب على إيجاد المصفوفة A .

لنضع:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

عندئذ بحساب عناصر هذه المصفوفة نجد:

$$a_{11} = \delta_{i1} \cdot \delta_{\ell 1} + \delta_{i2} \cdot \delta_{\ell 2} + \delta_{i3} \cdot \delta_{\ell 3} = \delta_{ip} \cdot \delta_{\ell p} = \delta_{i\ell}$$

$$a_{12} = \delta_{i1} \cdot \delta_{m1} + \delta_{i2} \cdot \delta_{m2} + \delta_{i3} \cdot \delta_{m3} = \delta_{ip} \cdot \delta_{mp} = \delta_{im}$$

$$a_{13} = \delta_{i1} \cdot \delta_{n1} + \delta_{i2} \cdot \delta_{n2} + \delta_{i3} \cdot \delta_{n3} = \delta_{ip} \cdot \delta_{np} = \delta_{in}$$

$$a_{21} = \delta_{j1} \cdot \delta_{\ell 1} + \delta_{j2} \cdot \delta_{\ell 2} + \delta_{j3} \cdot \delta_{\ell 3} = \delta_{jp} \cdot \delta_{\ell p} = \delta_{j\ell}$$

$$a_{22} = \delta_{j1} \cdot \delta_{m1} + \delta_{j2} \cdot \delta_{m2} + \delta_{j3} \cdot \delta_{m3} = \delta_{jp} \cdot \delta_{mp} = \delta_{jm}$$

$$a_{23} = \delta_{j1} \cdot \delta_{n1} + \delta_{j2} \cdot \delta_{n2} + \delta_{j3} \cdot \delta_{n3} = \delta_{jp} \cdot \delta_{np} = \delta_{jn}$$

$$a_{31} = \delta_{k1} \cdot \delta_{\ell 1} + \delta_{k2} \cdot \delta_{\ell 2} + \delta_{k3} \cdot \delta_{\ell 3} = \delta_{kp} \cdot \delta_{\ell p} = \delta_{k\ell}$$

$$a_{32} = \delta_{k1} \cdot \delta_{m1} + \delta_{k2} \cdot \delta_{m2} + \delta_{k3} \cdot \delta_{m3} = \delta_{kp} \cdot \delta_{mp} = \delta_{km}$$

$$a_{33} = \delta_{k1} \cdot \delta_{n1} + \delta_{k2} \cdot \delta_{n2} + \delta_{k3} \cdot \delta_{n3} = \delta_{kp} \cdot \delta_{np} = \delta_{kn}$$

بالتعويض في المصفوفة A نجد:

$$A = \begin{pmatrix} \delta_{i\ell} & \delta_{im} & \delta_{in} \\ \delta_{j\ell} & \delta_{jm} & \delta_{jn} \\ \delta_{k\ell} & \delta_{km} & \delta_{kn} \end{pmatrix}$$

ومنه نجد:

$$|A| = e_{ijk} \cdot e_{lmn} = \begin{vmatrix} \delta_{i\ell} & \delta_{im} & \delta_{in} \\ \delta_{j\ell} & \delta_{jm} & \delta_{jn} \\ \delta_{k\ell} & \delta_{km} & \delta_{kn} \end{vmatrix} ; \quad \forall i, j, k, \ell, m, n = 1, 2, 3$$

وهو المطلوب إثباته.

تمرين 1: (وظيفة).

أثبت أن:

$$e_{ijk} \cdot e_{imn} = \delta_{jm} \delta_{kn} - \delta_{jn} \delta_{km} \quad ; \quad \forall j, k, m, n = 1, 2, 3.$$

تمرين 2: (وظيفة).لتكن $A = [a_{ij}]_{3 \times 3}$ ، ولنرمز بـ $|A|$ لمعين A ، عندئذٍ أثبت أن:

$$|A| = e_{ijk} a_{i1} a_{j2} a_{k3} = a_{ijk} a_{1i} a_{2j} a_{3k}$$

انتهت المحاضرة.

بنامريخ 25 11 2010 .



جامعة البعث.

كلية العلوم.

قسم الرياضيات.

السنة الرابعة (ميكانيك).

علم المرونة

القسم النظري

المحاضرة الحادية والعشرون

مصفوفة الدورانات الأولرية:

لتكن $p \equiv (x_1, x_2, x_3)$ نقطة مادية لاغرانجية ما، من الوسط المادي المستمر، والتي تقابلها في اللحظة $t > 0$ ، النقطة المادية الأولرية $p' = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$. ولنأخذ متجه الإزاحة:

$$\vec{u} = \overrightarrow{pp'}$$

وجدنا سابقاً أن:

$$x_i = x_i(p'; t) ; i = 1, 2, 3.$$

والمركبات الديكارتية الأولرية لـ $\vec{u}$ هي:

$$u_i(p'; t) = \xi_i - x_i(p'; t) ; i = 1, 2, 3.$$

تعريف 1:

ندعو مصفوفة التوابع الأولرية $\{\zeta_{ij}(p'; t)\}_{3 \times 3}$ ، والمعرفة بالشكل:

$$\zeta_{ij}(p'; t) + \eta_{ij}(p'; t) = \frac{\partial u_i}{\partial \xi_j}(p'; t).$$

بمصفوفة الدورانات الأولرية للوسط المادي المستمر.

نتيجة 1:

$$\begin{aligned} \zeta_{ij}(p'; t) &= \frac{\partial u_i}{\partial \xi_j}(p'; t) - \eta_{ij}(p'; t) \\ &= \frac{\partial u_i}{\partial \xi_j}(p'; t) - \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u_i}{\partial \xi_j}(p'; t) + \frac{\partial u_j}{\partial \xi_i}(p'; t) - \frac{\partial u_s}{\partial \xi_i}(p'; t) \cdot \frac{\partial u_s}{\partial \xi_j}(p'; t) \right] \\ \Rightarrow \\ \zeta_{ij}(p'; t) &= \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u_i}{\partial \xi_j}(p'; t) - \frac{\partial u_j}{\partial \xi_i}(p'; t) + \frac{\partial u_s}{\partial \xi_i}(p'; t) \cdot \frac{\partial u_s}{\partial \xi_j}(p'; t) \right] \end{aligned}$$

نتيجة 2:

ليكن: $d\vec{S}_0 = \overrightarrow{pQ}$ ، حيث $p \equiv (x_1, x_2, x_3)$ و $Q \equiv (x_1 + dx_1, x_2 + dx_2, x_3 + dx_3)$ قريبة على p ، عنصراً خطياً لاغرانجياً بدايته النقطة المادية اللاغرانجية p .

والذي في اللحظة $t > 0$ ، يصبح العنصر الخطي الأولري $\vec{dS} = \overrightarrow{p'Q'}$ ، (حيث $p' \equiv (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ و $Q' \equiv (\xi_1 + d\xi_1, \xi_2 + d\xi_2, \xi_3 + d\xi_3)$ قريبة على p'). عندئذٍ:

$$\vec{dS}_0 = dx_1 \vec{e}_1 + dx_2 \vec{e}_2 + dx_3 \vec{e}_3 = dx_i \vec{e}_i \quad \dots\dots\dots (1)$$

ولكن أولرياً لدينا:

$$x_i = x_i(p'; t) \quad ; \quad i = 1, 2, 3 \quad \dots\dots\dots (2)$$

لو فرضنا في (2) أن: $t = \text{const} > 0$ ، فتصبح x_i تابعة لـ p' فقط، وعندئذٍ نكتب:

$$\begin{aligned} dx_i &= \frac{\partial x_i}{\partial \xi_1}(p'; t) d\xi_1 + \frac{\partial x_i}{\partial \xi_2}(p'; t) d\xi_2 + \frac{\partial x_i}{\partial \xi_3}(p'; t) d\xi_3 \\ &= \frac{\partial x_i}{\partial \xi_j}(p'; t) d\xi_j \quad \dots\dots\dots (3) \end{aligned}$$

وبما أن:

$$\begin{aligned} u_i(p'; t) &= \xi_i - x_i(p'; t) \Rightarrow \\ x_i(p'; t) &= \xi_i - u_i(p'; t) \quad ; \quad i = 1, 2, 3 \quad \dots\dots\dots (4) \end{aligned}$$

بالاستفادة من (4) في (3)، نجد:

$$dx_i = \frac{\partial x_i}{\partial \xi_j}(p'; t) d\xi_j = \left[\delta_{ij} - \frac{\partial u_i}{\partial \xi_j}(p'; t) \right] d\xi_j \quad \dots\dots\dots (5)$$

وبما أن:

$$\eta_{ij}(p'; t) + \zeta_{ij}(p'; t) = \frac{\partial u_i}{\partial \xi_j}(p'; t).$$

عندئذٍ تصبح (5) بالشكل:

$$dx_i = \left[\delta_{ij} - \eta_{ij}(p'; t) - \zeta_{ij}(p'; t) \right] d\xi_j$$

والتفسير الأولي للحركة هو التالي:

الحركة أولياً هي:

(1) انسحاب بـ δ_{ij} .

(2) تشوه أولري بـ $\eta_{ij}(p';t)$.

(3) دوران أولري بـ $\zeta_{ij}(p';t)$.

مقدمة في الهندسة التفاضلية:

ملاحظة 1:

لتكن $Ox_1x_2x_3$ جملة إحداثيات ديكارتية قائمة يمينية ومباشرة، وقاعدتها $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ عندئذ يكون:

(1) $\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \delta_{ij} \quad ; \quad i, j = 1, 2, 3.$

(2) إذا كان: $\vec{a} = a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2 + a_3 \vec{e}_3 = a_i \vec{e}_i$ فإنه عندئذ يكون:

$a_i = \vec{a} \cdot \vec{e}_i \quad ; \quad i = 1, 2, 3.$

البرهان:

(1) واضح.

(2) لدينا:

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{e}_i &= (a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2 + a_3 \vec{e}_3) \cdot \vec{e}_i = (a_j \vec{e}_j) \cdot \vec{e}_i \\ &= a_j (\vec{e}_j \cdot \vec{e}_i) = a_j (\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j) = a_j \delta_{ij} = a_i \end{aligned}$$

إذاً أصبح لدينا:

$a_i = \vec{a} \cdot \vec{e}_i$

وبالتالي:

$$\vec{a} = (\vec{a} \cdot \vec{e}_1) \cdot \vec{e}_1 + (\vec{a} \cdot \vec{e}_2) \cdot \vec{e}_2 + (\vec{a} \cdot \vec{e}_3) \cdot \vec{e}_3$$



لتكن $Ox_1x_2x_3$ جملة أولى إحداثية ديكارتية قائمة يمينية مباشرة، وقاعدتها $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$.
و $Ox_1x_2x_3$ جملة ثانية إحداثية ديكارتية قائمة يمينية مباشرة، وقاعدتها $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$.
ولنأخذ المصفوفة: $\alpha = \{\alpha_{ij}\}_{3 \times 3}$ المعرفة بالشكل:

$$\alpha = \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j$$

عندئذ لدينا المبرهنة التالية:

مبرهنة 1:

(1) α هي مصفوفة الانتقال من الجملة $Ox_1x_2x_3$ إلى الجملة $Ox_1x_2x_3$.

(2) α^T (منقول α) هي مصفوفة الانتقال من $Ox_1x_2x_3$ إلى $Ox_1x_2x_3$.

(3) α نظامية (معينها لا يساوي الصفر)، و $\alpha^{-1} = \alpha^T$.

$$|\alpha| = \pm 1 \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \alpha_{ki} \alpha_{kj} &= \delta_{ij} \quad ; i, j = 1, 2, 3 \\ \alpha_{ik} \alpha_{jk} &= \delta_{ij} \quad ; i, j = 1, 2, 3. \end{aligned} \quad (5)$$

(البرهان في المحاضرة القادمة).

انتهت المحاضرة.

بنامريخ 28 11 2010 .



جامعة البعث.

كلية العلوم.

قسم الرياضيات.

السنة الرابعة (ميكانيك).

علم المرونة

القسم النظري

المحاضرة الثانية والعشرون

مبرهنة 1: (من المحاضرة السابقة).

لتكن جملة أولى إحداثية ديكارتية قائمة يمينية مباشرة، وقاعدتها $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$.
و جملة ثانية إحداثية ديكارتية قائمة يمينية مباشرة، وقاعدتها $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$.
ولنأخذ المصفوفة: $\alpha := \{\alpha_{ij}\}_{3 \times 3}$ المعرفة بالشكل:

$$\alpha := \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j$$

عندئذ ما يلي محقق:

$$(1) \quad \alpha \text{ هي مصفوفة الانتقال من الجملة } Ox_1x_2x_3 \text{ إلى الجملة } O\tilde{x}_1\tilde{x}_2\tilde{x}_3.$$

$$(2) \quad \alpha^T \text{ (منقول } \alpha) \text{ هي مصفوفة الانتقال من } O\tilde{x}_1\tilde{x}_2\tilde{x}_3 \text{ إلى } Ox_1x_2x_3.$$

$$(3) \quad \alpha \text{ ناظمية (معينها لا يساوي الصفر)، و } \alpha^{-1} = \alpha^T.$$

$$(4) \quad |\alpha| = \pm 1.$$

$$(5) \quad \begin{aligned} \alpha_{ki} \alpha_{kj} &= \delta_{ij} ; i, j = 1, 2, 3 \\ \alpha_{ik} \alpha_{jk} &= \delta_{ij} ; i, j = 1, 2, 3. \end{aligned}$$

البرهان:

$$(1) \quad \text{ليكن } \vec{a} \in \square^3 \text{، عندئذ:}$$

$$\vec{a} = a_i \vec{e}_i \quad \wedge \quad \vec{a} = a_j \vec{e}_j$$

بما أن $\vec{e}_i$ ديكارتية قائمة، عندئذ:

$$a_i = \vec{a} \cdot \vec{e}_i = (a_j \vec{e}_j) \cdot \vec{e}_i = a_j (\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j) = a_j \alpha_{ij} = \alpha_{ij} a_j$$

$\Rightarrow$

$$a_i = \alpha_{ij} a_j ; i = 1, 2, 3.$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{1j} \cdot a_j \\ \alpha_{2j} \cdot a_j \\ \alpha_{3j} \cdot a_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \alpha \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

أي أن α هي مصفوفة الانتقال من الجملة $O x_1 x_2 x_3$ إلى الجملة $O x_1 x_2 x_3$.

(2) بما أن $\vec{e}_j$ ديكارتية قائمة، عندئذ:

$$a_j = \vec{a} \cdot \vec{e}_j = (\vec{a}_i \cdot \vec{e}_i) \vec{e}_j = \vec{a}_i (\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j) = \vec{a}_i \alpha_{ij} = \alpha_{ij} \vec{a}_i$$

$\Rightarrow$

$$a_j = \alpha_{ij} \vec{a}_i ; i = 1, 2, 3.$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{i1} \cdot \vec{a}_i \\ \alpha_{i2} \cdot \vec{a}_i \\ \alpha_{i3} \cdot \vec{a}_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} & \alpha_{31} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \alpha_{32} \\ \alpha_{13} & \alpha_{23} & \alpha_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \vec{a}_1 \\ \vec{a}_2 \\ \vec{a}_3 \end{pmatrix} = \alpha^T \cdot \begin{pmatrix} \vec{a}_1 \\ \vec{a}_2 \\ \vec{a}_3 \end{pmatrix}$$

أي أن α^T هي مصفوفة الانتقال من الجملة $O x_1 x_2 x_3$ إلى الجملة $O x_1 x_2 x_3$.

(3) وجدنا في برهان البند الأول أن:

$$\begin{pmatrix} \vec{a}_1 \\ \vec{a}_2 \\ \vec{a}_3 \end{pmatrix} = \alpha \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} ; \forall \vec{a} = a_j \vec{e}_j = \vec{a}_i \vec{e}_i \in \mathbb{R}^3 \quad \dots\dots\dots (1)$$

بتثبيت $\vec{a} \neq \vec{0}$ ، حيث: $\vec{a} = a_j \vec{e}_j = \vec{a}_i \vec{e}_i$ ، عندئذ يُمثل $\vec{a}$ بشكل وحيد:

$$(a_1, a_2, a_3) \neq (0, 0, 0)$$

في القاعدة $\vec{e}_j$.

كما يمثل $\vec{a}$ بشكل وحيد:

$$(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3) \neq (0, 0, 0)$$

في القاعدة $\vec{e}_i$.

فإذا افترضنا أن $(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3)$ معلومة، و (a_1, a_2, a_3) مجهولة، فمن خلال التمثيل الوحيد لـ $\vec{a}$ في كلا القاعدتين نجد أنه يجب أن يكون لجملة المعادلات (1) حلاً وحيداً (a_1, a_2, a_3) يختلف عن الحل الصفري.

وهذا لا يتحقق إلا إذا كان: $|\alpha| \neq 0$ ، أي المصفوفة α نظامية. وبالتالي بما أن α نظامية، عندئذ فإن α^{-1} موجود. هذا من جهة أولى، ومن جهة أخرى، وجدنا بحسب برهان البند الأول وبرهان البند الثاني أن:

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \alpha \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \quad \dots\dots\dots (1')$$

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \alpha^T \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} \quad \dots\dots\dots (2')$$

وذلك: $\forall \vec{a} = a_j \vec{e}_j = \alpha_i \vec{e}_i \in \mathbb{R}^3$

بضرب طرفي العلاقة (1') بـ α^{-1} من اليسار، نجد:

$$\alpha^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \alpha^{-1} \cdot \left[\alpha \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

بالمقارنة مع العلاقة (2')، نجد:

$$\alpha^{-1} = \alpha^T$$

وهو المطلوب إثباته.

(4) بحسب برهان البند السابق (الثالث)، نكتب:

$$I = \alpha^{-1} \cdot \alpha = \alpha^T \cdot \alpha$$

$$1 = |\alpha^T| \cdot |\alpha| = |\alpha| \cdot |\alpha| = |\alpha|^2 \Rightarrow$$

$$|\alpha| = \pm 1$$

(5) برهان البند الخامس يتم بالاعتماد على العلاقة $I = \alpha^T \cdot \alpha$ ، وملاحظة أن الحد العام

للمصفوفة الواحدية هو (δ_{ij})

(البرهان وظيفية).

تعريف 1:

لتكن $Ox_1x_2x_3$ جملة أولى إحداثية ديكارتية قائمة يمينية مباشرة، وقاعدتها $\vec{e}_j = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ و $Ox_1x_2x_3$ جملة ثانية إحداثية ديكارتية قائمة يمينية مباشرة، وقاعدتها $\vec{e}_i = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$. ولنأخذ مصفوفة الانتقال: $\alpha := \{\alpha_{ij}\}_{3 \times 3}$ المعرفة بالشكل:

$$\alpha := \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j$$

من القاعدة الأولى إلى القاعدة الثانية.

ليكن $a_{j_1j_2...j_n}$ ، $a_{i_1i_2...i_n}$ متعدد دلائل، كل منهما له n دليل. نقول أن $a_{j_1j_2...j_n}$ تمثل المركبات لتتسور من المرتبة n فوق $\mathbb{R}^3$ في القاعدة $\vec{e}_j$ ، و $a_{i_1i_2...i_n}$ تمثل المركبات لنفس التتسور في القاعدة $\vec{e}_i$ ، إذا وفقط إذا تحقق الشرط التالي:

$$a_{i_1i_2...i_n} = \alpha_{i_1j_1} \cdot \alpha_{i_2j_2} \cdot \dots \cdot \alpha_{i_nj_n} \cdot a_{j_1j_2...j_n}$$

انتهت المحاضرة.

بنامريخ 30 11 2010 .



جامعة البعث.

كلية العلوم.

قسم الرياضيات.

السنة الرابعة (ميكانيك).

علم المرونة

القسم النظري

المحاضرة الثالثة والعشرون

تمرين 1:

أثبت أن:

$$e_{ijk} e_{imn} = \delta_{jm} \delta_{kn} - \delta_{jn} \delta_{km}$$

الإثبات:

نعلم أن:

$$e_{ijk} e_{lmn} = \begin{vmatrix} \delta_{i\ell} & \delta_{im} & \delta_{in} \\ \delta_{j\ell} & \delta_{jm} & \delta_{jn} \\ \delta_{k\ell} & \delta_{km} & \delta_{kn} \end{vmatrix} =$$

$$= \delta_{i\ell} (\delta_{jm} \delta_{kn} - \delta_{jn} \delta_{km}) + \delta_{im} (\delta_{jn} \delta_{k\ell} - \delta_{j\ell} \delta_{kn}) + \delta_{in} (\delta_{j\ell} \delta_{km} - \delta_{jm} \delta_{k\ell})$$

وبأخذ التقليل للدليلين ℓ, j نضع $\ell = i$ فنجد:

$$e_{ijk} e_{imn} = \begin{vmatrix} \delta_{ii} & \delta_{im} & \delta_{in} \\ \delta_{ji} & \delta_{jm} & \delta_{jn} \\ \delta_{ki} & \delta_{km} & \delta_{kn} \end{vmatrix} =$$

$$= \delta_{ii} (\delta_{jm} \delta_{kn} - \delta_{jn} \delta_{km}) + \delta_{im} (\delta_{jn} \delta_{ki} - \delta_{ji} \delta_{kn}) + \delta_{in} (\delta_{ji} \delta_{km} - \delta_{jm} \delta_{ki})$$

$$= 3 (\delta_{jm} \delta_{kn} - \delta_{jn} \delta_{km}) + \delta_{jn} \delta_{km} - \delta_{jm} \delta_{kn} + \delta_{jn} \delta_{km} - \delta_{jm} \delta_{kn}$$

$$= 3 (\delta_{jm} \delta_{kn} - \delta_{jn} \delta_{km}) - 2 (\delta_{jm} \delta_{kn} - \delta_{jn} \delta_{km})$$

$$= \delta_{jm} \delta_{kn} - \delta_{jn} \delta_{km}$$

تمرين 2:لتكن $A = \{a_{ij}\}_{3 \times 3}$ مصفوفة أعداد حقيقية، ولنرمز لمعينها بالرمز $|A|$. عندئذ نكتب:

$$|A| = e_{ijk} \cdot a_{i1} \cdot a_{j2} \cdot a_{k3} = e_{ijk} \cdot a_{1i} \cdot a_{2j} \cdot a_{3k}$$

الحل:بالجمع على الدليل المكرر i ، ومن ثم الدليلين j, k يمكننا أن نكتب:

$$\begin{aligned}
e_{ijk} \cdot a_{i1} \cdot a_{j2} \cdot a_{k3} &= e_{1jk} \cdot a_{11} \cdot a_{j2} \cdot a_{k3} + e_{2jk} \cdot a_{21} \cdot a_{j2} \cdot a_{k3} + e_{3jk} \cdot a_{31} \cdot a_{j2} \cdot a_{k3} \\
&= e_{123} \cdot a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + e_{231} \cdot a_{21} \cdot a_{32} \cdot a_{13} + e_{312} \cdot a_{31} \cdot a_{12} \cdot a_{22} + \\
&+ e_{132} \cdot a_{11} \cdot a_{32} \cdot a_{23} + e_{213} \cdot a_{21} \cdot a_{12} \cdot a_{33} + e_{312} \cdot a_{31} \cdot a_{12} \cdot a_{32} \\
&= a_{11} a_{22} a_{33} + a_{21} a_{32} a_{13} + a_{31} a_{12} a_{22} - a_{11} a_{32} a_{23} - a_{21} a_{12} a_{33} - a_{31} a_{12} a_{32}
\end{aligned}$$

تمارين: (وظيفة).

(1) لتكن $A = \{a_{ij}\}_{3 \times 3}$ مصفوفة أعداد حقيقية، ولنرمز لمعينها بالرمز $|A|$ ، عندئذٍ أثبت أن:

$$1. \quad \begin{vmatrix} a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} \\ a_{j1} & a_{j2} & a_{j3} \\ a_{k1} & a_{k2} & a_{k3} \end{vmatrix} = |A| \cdot e_{ijk}$$

$$2. \quad \begin{vmatrix} a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} \\ a_{j1} & a_{j2} & a_{j3} \\ a_{k1} & a_{k2} & a_{k3} \end{vmatrix} = e_{lmn} \cdot a_{i\ell} \cdot a_{jm} \cdot a_{kn}$$

(2) أثبت أن:

$$|A| = \frac{1}{6} e_{ijk} \cdot e_{lmn} \cdot a_{i\ell} \cdot a_{jm} \cdot a_{kn}$$

انتهت المحاضرة.

بنامريغ 2 12 2010 .



جامعة البعث.

كلية العلوم.

قسم الرياضيات.

السنة الرابعة (ميكانيك).

علم المرونة

القسم النظري

المحاضرة الرابعة والعشرون

مثال 1:

وفقاً للبند الأول من المبرهنة السابقة، وجدنا أنه:

$$\vec{a}_i = \alpha_{ij} a_j$$

والذي يعني أن a_j تمثل المركبات في الجملة الأولى $Ox_1x_2x_3$ و $\vec{a}_i$ تمثل المركبات في الجملة الثانية $Ox'_1x'_2x'_3$ ، لتتصور a من المرتبة الأولى فوق الفضاء $\square^3$. لإثبات ذلك، علينا أن نثبت أن:

$$\delta_{ij} = \alpha_{ik} \alpha_{jl} \delta_{kl}$$

انطلاقاً من الطرف الأيمن وبالاكتفاء على خاصية تصفية دلتا كرونكيا، وبالاكتفاء على مبرهنة سابقة نجد:

$$\alpha_{ik} \alpha_{jl} \delta_{kl} = \alpha_{ik} \alpha_{jk} = \delta_{ij}$$

وهو المطلوب.

تحويل إحداثيات نقطة من الفضاء $\square^3$ بتغيير الجملة الإحداثية:

لتكن $Ox_1x_2x_3$ جملة أولى إحداثية ديكارتية قائمة يمينية مباشرة، وقاعدتها $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$. و $Ox'_1x'_2x'_3$ جملة ثانية إحداثية ديكارتية قائمة يمينية مباشرة، وقاعدتها $\{\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3\}$. عندئذ تكون المصفوفة: $\alpha := \{\alpha_{ij}\}_{3 \times 3}$ المعرفة بالشكل: $\alpha := \vec{e}'_i \cdot \vec{e}_j$.

هي مصفوفة الانتقال من الجملة الأولى إلى الجملة الثانية. ولتكن $p \in \square^3$ ، ولنفرض أن: $p \equiv (x_1, x_2, x_3)$ في الجملة الأولى $Ox_1x_2x_3$ ، و $p \equiv (x'_1, x'_2, x'_3)$ في الجملة الثانية $Ox'_1x'_2x'_3$ ، عندئذ:

(1) نفرض أن $O \equiv (a_1, a_2, a_3)$ في الجملة الثانية $Ox'_1x'_2x'_3$ ، ففي هذه الحالة:

$$\vec{OP} = \vec{OO} + \vec{OP} \Rightarrow \vec{OP} - \vec{OO} = \vec{OP}$$

$$\Rightarrow x_i \vec{e}'_i - a_i \vec{e}'_i = x_j \vec{e}'_j \Rightarrow (x_i - a_i) \vec{e}'_i = x_j \vec{e}'_j$$

$$\Rightarrow x_i - a_i = (x_j \vec{e}'_j) \cdot \vec{e}'_i = x_j (\vec{e}'_j \cdot \vec{e}'_i) = x_j \alpha_{ij} = \alpha_{ij} x_j$$

$$\Rightarrow x_i = a_i + \alpha_{ij} x_j ; i = 1, 2, 3.$$

(2) نفرض أن $O \equiv (a_1, a_2, a_3)$ في الجملة الأولى $Ox_1x_2x_3$ ، ففي هذه الحالة:

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OO} + \overrightarrow{OP} \Rightarrow \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OO} = \overrightarrow{OP}$$

$$\Rightarrow x_j \vec{e}_j - a_j \vec{e}_j = x_i \vec{e}_i \Rightarrow (x_j - a_j) \vec{e}_j = x_i \vec{e}_i$$

$$\Rightarrow x_j - a_j = (x_i \vec{e}_i) \vec{e}_j = x_i (\vec{e}_i \vec{e}_j) = x_i \alpha_{ij} = \alpha_{ij} x_i$$

$$\Rightarrow x_j = a_j + \alpha_{ij} x_i ; j=1,2,3.$$

نتيجة 1: (هامة).

لتكن p نقطة لاغرانجية من الوسط المادي المستمر، ولنفرض أن $p \equiv (x_1, x_2, x_3)$ في الجملة الأولى $Ox_1x_2x_3$ ، و $p \equiv (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$ في الجملة الثانية $O\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3$. في اللحظة $t > 0$ تصبح p النقطة الأولرية $p' \equiv (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ حيث $p' \equiv (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ في الجملة الأولى $Ox_1x_2x_3$ ، و $p' \equiv (\bar{\xi}_1, \bar{\xi}_2, \bar{\xi}_3)$ في الجملة الثانية $O\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3$. في الجملة الأولى لدينا:

$$\xi_i = \xi_i(p; t) ; p \equiv (x_1, x_2, x_3) , i = 1, 2, 3$$

وفي الجملة الثانية لدينا:

$$\bar{\xi}_i = \bar{\xi}_i(p; t) ; p \equiv (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3) , i = 1, 2, 3$$

كما أن مصفوفة الانفعالات اللاغرانجية المتعلقة بـ $Ox_1x_2x_3$ هي:

$$e_{ij}(p; t) = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial \xi_s}{\partial x_i}(p; t) \cdot \frac{\partial \xi_s}{\partial x_j}(p; t) - \delta_{ij} \right] ; p \equiv (x_1, x_2, x_3)$$

كما أن مصفوفة الانفعالات اللاغرانجية المتعلقة بـ $O\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3$ هي:

$$\bar{e}_{ij}(p; t) = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial \bar{\xi}_s}{\partial \bar{x}_i}(p; t) \cdot \frac{\partial \bar{\xi}_s}{\partial \bar{x}_j}(p; t) - \delta_{ij} \right] ; p \equiv (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$$

عندئذٍ بسهولة يمكن إثبات أن:

$$\bar{e}_{k\ell}(p; t) = \alpha_{ki} \alpha_{\ell j} e_{ij}(p; t)$$

بحسب التعريف فإن $e_{ij}(p;t)$ تمثل المركبات في الجملة الأولى $Ox_1x_2x_3$ ، و $e_{k\ell}(p;t)$ تمثل المركبات في الجملة الثانية $Ox_1x_2x_3$ لتتصور $e(p;t)$ من المرتبة الثانية فوق $\square^3$. ندعوا هذا التنسور $e(p;t)$ بتنسور الانفعال اللاگرانجي.

نتيجة 2: (هامة).

مجموع عناصر القطر الرئيسي لمصفوفة الانفعالات اللاگرانجية لا يتغير بتغير الجملة الإحداثية.

الإثبات:

وجدنا منذ قليل أن:

$$e_{k\ell}(p;t) = \alpha_{ki} \alpha_{\ell j} e_{ij}(p;t)$$

فبأخذ تقلص طرفي العلاقة السابقة عندما $\ell = k$ ، نجد:

$$e_{kk}(p;t) = \alpha_{ki} \alpha_{kj} e_{ij}(p;t) = \delta_{ij} e_{ij}(p;t) = e_{ii}(p;t) \Rightarrow$$

$$e_{11}(p;t) + e_{22}(p;t) + e_{33}(p;t) = e_{11}(p;t) + e_{22}(p;t) + e_{33}(p;t)$$

وهو المطلوب.

انتهت المحاضرة.

بنامريخ 5 12 2010 .



جامعة البعث.

كلية العلوم.

قسم الرياضيات.

السنة الرابعة (ميكانيك).

علم المرونة

القسم النظري

المحاضرة الخامسة والعشرون

تمرين 1:

أثبت أن:

$$e_{ijk} e_{ijk} = 6$$

الحل:

$$\begin{aligned}
 e_{ijk} e_{ijk} &= \sum_{i \text{ دليل مكرر}} e_{ijk} e_{ijk} = e_{1jk} e_{1jk} + e_{2jk} e_{2jk} + e_{3jk} e_{3jk} \\
 &= e_{123} e_{123} + e_{132} e_{132} + e_{213} e_{213} + e_{231} e_{231} + e_{312} e_{312} + e_{321} e_{321} \\
 &= (1)(1) + (-1)(-1) + (-1)(-1) + (1)(1) + (1)(1) + (-1)(-1) \\
 &= 1+1+1+1+1+1=6
 \end{aligned}$$

تمرين 2:

لتكن $A = \{a_{ij}\}_{3 \times 3}$ مصفوفة أعداد حقيقية، ولنرمز لمعين A بـ $|A|$. والمطلوب: أثبت أن:

$$\begin{vmatrix} a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} \\ a_{j1} & a_{j2} & a_{j3} \\ a_{k1} & a_{k2} & a_{k3} \end{vmatrix} = |A| \cdot e_{ijk} \quad ; \quad i, j, k = 1, 2, 3.$$

الحل:

نميز الحالتين التاليتين:

1. إذا تساوى دليلين على الأقل من الدلائل i, j, k ، عندئذٍ $e_{ijk} = 0$ (حسب تعريف مناوب ليفي تشيفيتي)، وكذلك تكون قيمة المعين معدومة لتساوي سطرين على الأقل من أسطره، وبالتالي فالعلاقة محققة.

2. نميز حالتين:

أ) (i, j, k) تبديلة زوجية للأعداد $1, 2, 3$ عندئذٍ $|A| \cdot e_{ijk} = |A|$ ، وكذلك المعين يكون ناتج عن معين A بعد إجراء عدد زوجي من التبديلات على أسطره وبالتالي فقيمه تساوي قيمة معين A ، وبالتالي فالعلاقة محققة.

(ب) (i, j, k) تبديلة فردية للأعداد 1, 2, 3 عندئذ: $|A| \cdot e_{ijk} = -|A|$ ، وكذلك المعين يكون ناتج عن معين A بعد إجراء عدد فردي من التبديلات على أسطره وبالتالي فقيمته تساوي $-|A|$ ، وبالتالي فالعلاقة محققة.

تمرين 3:

لتكن $A = \{a_{ij}\}_{3 \times 3}$ مصفوفة أعداد حقيقية، ولنرمز لمعين A بـ $|A|$. والمطلوب: أثبت أن:

$$\begin{vmatrix} a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} \\ a_{j1} & a_{j2} & a_{j3} \\ a_{k1} & a_{k2} & a_{k3} \end{vmatrix} = e_{lmn} a_{i\ell} a_{jm} a_{kn} \quad ; \quad i, j, k = 1, 2, 3.$$

الحل:

لنفرض أن:

$$A_{11} = a_{i1}, \quad A_{12} = a_{i2}, \quad A_{13} = a_{i3} \Rightarrow A_{1\ell} = a_{i\ell}$$

$$A_{21} = a_{j1}, \quad A_{22} = a_{j2}, \quad A_{23} = a_{j3} \Rightarrow A_{2m} = a_{jm}$$

$$A_{31} = a_{k1}, \quad A_{32} = a_{k2}, \quad A_{33} = a_{k3} \Rightarrow A_{3n} = a_{kn}$$

وجدنا حسب تمرين سابق أن:

$$\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{vmatrix} = e_{lmn} A_{1\ell} A_{2m} A_{3n}$$

ولكن:

$$\begin{vmatrix} a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} \\ a_{j1} & a_{j2} & a_{j3} \\ a_{k1} & a_{k2} & a_{k3} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{vmatrix}$$

وكذلك:

$$A_{1\ell} A_{2m} A_{3n} = a_{i\ell} a_{jm} a_{kn}$$

وبالتالي نجد:

$$\begin{vmatrix} a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} \\ a_{j1} & a_{j2} & a_{j3} \\ a_{k1} & a_{k2} & a_{k3} \end{vmatrix} = e_{lmn} a_{i\ell} a_{jm} a_{kn} \quad ; \quad i, j, k = 1, 2, 3.$$

وهو المطلوب.

تمرين 4:

لتكن $A = \{a_{ij}\}_{3 \times 3}$ مصفوفة أعداد حقيقية، ولنرمز لمعين A بـ $|A|$ والمطلوب:
أثبت أن:

$$|A| = \frac{1}{6} e_{ijk} e_{lmn} a_{i\ell} a_{jm} a_{kn}$$

بحسب تمرينين سابقين وجدنا أن:

$$|A| \cdot e_{ijk} = \begin{vmatrix} a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} \\ a_{j1} & a_{j2} & a_{j3} \\ a_{k1} & a_{k2} & a_{k3} \end{vmatrix} = e_{lmn} a_{i\ell} a_{jm} a_{kn} \quad ; \quad i, j, k = 1, 2, 3.$$

$\Rightarrow$

$$|A| \cdot e_{ijk} = e_{lmn} a_{i\ell} a_{jm} a_{kn} \quad ; \quad i, j, k = 1, 2, 3.$$

بضرب الطرفين بـ e_{ijk} نجد:

$$|A| \cdot e_{ijk} \cdot e_{ijk} = e_{ijk} \cdot e_{lmn} a_{i\ell} a_{jm} a_{kn} \Rightarrow$$

$$|A| \times 6 = e_{ijk} \cdot e_{lmn} a_{i\ell} a_{jm} a_{kn} \Rightarrow$$

$$|A| = \frac{1}{6} e_{ijk} \cdot e_{lmn} a_{i\ell} a_{jm} a_{kn}$$

وهو المطلوب.

تمرين 1: (وظيفة).

ليكن:

$$\vec{a} = a_j \vec{e}_j, \quad \vec{b} = b_k \vec{e}_k$$

عندئذٍ أثبت أن:

$$\vec{a} \wedge \vec{b} = e_{ijk} a_j b_k \vec{e}_i = e_{ijk} a_i b_j \vec{e}_k$$

تمرين 2: (وظيفة).

ليكن:

$$\vec{a} = a_i \vec{e}_i, \quad \vec{b} = b_j \vec{e}_j, \quad \vec{c} = c_k \vec{e}_k$$

عندئذٍ أثبت أن:

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = e_{ijk} a_i b_j c_k.$$

انتهت المحاضرة.

بنامريخ 9 12 2010 .



جامعة البعث.

كلية العلوم.

قسم الرياضيات.

السنة الرابعة (ميكانيك).

علم المرونة

القسم النظري

المحاضرة السادسة والعشرون

جملة المحاور الرئيسية للانفعالات:

نسمي الجملة $Ox_1x_2x_3$ التي تكون مصفوفة الانفعالات اللاغرانجية المتعلقة بها من الشكل:

$$\{e_{jk}(p;t)\} = \begin{pmatrix} e_{11}(p;t) & 0 & 0 \\ 0 & e_{22}(p;t) & 0 \\ 0 & 0 & e_{33}(p;t) \end{pmatrix}$$

بجملة محاور رئيسية للانفعال ؛ حيث نسمي:

$$e_1(p;t) = e_{11}(p;t) , \quad e_2(p;t) = e_{22}(p;t) , \quad e_3(p;t) = e_{33}(p;t)$$

بالقيم الرئيسية للانفعال في النقطة p واللحظة $t > 0$.

نتيجة 1:

في جملة المحاور الرئيسية للانفعال $Ox_1x_2x_3$ يكون تشوه الوسط المادي المستمر في كل نقطة لاغرانجية p وكل لحظة $t > 0$ مكافئاً فقط لثلاث تغيرات نسبية باتجاه المحاور الرئيسية للانفعال: $\overrightarrow{Ox_1}$, $\overrightarrow{Ox_2}$, $\overrightarrow{Ox_3}$.

مقدمة جبرية:

لتكن $A = \{a_{ij}\}_{3 \times 3}$ مصفوفة أعداد حقيقية.

تعريف 1:

نسمي:

$$I_1 := a_{ii} = a_{11} + a_{22} + a_{33} ,$$

$$I_2 := \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} ,$$

$$I_3 := \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

بآثار المصفوفة A حيث I_1 تدعى بالآثر الأول لـ A ، و I_2 تدعى بالآثر الثاني لـ A ، و I_3 تدعى بالآثر الثالث لـ A .

تعريف 2:

ندعوا كثير الحدود الحقيقي من الدرجة الثالثة:

$$P_3(\lambda) := \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - \lambda \end{vmatrix}$$

بكثير الحدود المميز للمصفوفة A . كما ندعوا المعادلة: $P_3(\lambda) = 0$ بالمعادلة المميزة للمصفوفة A . كما ندعوا كل λ_0 تحقق المعادلة: $P_3(\lambda) = 0$ ، قيمة مميزة للمصفوفة A .

تمرين 1:

أثبت أن:

$$P_3(\lambda) := \begin{vmatrix} a_{ij} - \lambda \delta_{ij} \end{vmatrix} = -\lambda^3 + I_1 \lambda^2 - I_2 \lambda + I_3$$

مبرهنة: (تقبل دون برهان).

إذا كانت لدينا مصفوفة الأعداد الحقيقية $A = \{a_{ij}\}_{3 \times 3}$ ، عندئذ القيم الذاتية الثلاث المميزة للمصفوفة A هي أعداد حقيقية.

ملاحظة 1:

لتكن $Ox_1x_2x_3$ جملة إحداثية أولى ديكارتية، قائمة، يمينية، مباشرة وقاعدتها $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$. ولتكن $Ox_1x_2x_3$ جملة إحداثية ثانية ديكارتية، قائمة، يمينية، مباشرة وقاعدتها $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$. ولنأخذ مصفوفة الانتقال:

$$\alpha := \{\alpha_{ij}\}_{3 \times 3} \quad ; \quad \alpha_{ij} = \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j$$

ولنفرض أن $a_{k\ell}$ هي المركبات في الجملة الأولى، و α_{ij} هي المركبات في الجملة الثانية لتتصور a من المرتبة الثانية فوق الفضاء $\mathbb{R}^3$. فبحسب التعريف ينتج أن:

$$\alpha_{ij} = \alpha_{ik} \alpha_{j\ell} a_{j\ell}$$

عندئذ:

(1) إذا كانت $\{a_{k\ell}\}_{3 \times 3}$ متناظرة، فإن $\{\alpha_{ij}\}_{3 \times 3}$ متناظرة، والعكس صحيح. وفي هذه الحالة نقول أن التتسور a متناظر (البرهان واضح).

(2) إذا كان التتسور a متناظر، وإذا رمزنا بـ $P_3(\lambda)$ لكثير الحدود المميز لـ $\{a_{k\ell}\}_{3 \times 3}$ و بـ $\mathcal{P}_3(\lambda)$ لكثير الحدود المميز لـ $\{\alpha_{ij}\}_{3 \times 3}$ ، عندئذ يكون:

$$P_3(\lambda) \equiv \mathcal{P}_3(\lambda) \quad (\text{البرهان موجود في أبحاث الجبر التتسوري}).$$

نتيجة 2:

إذا كان التتسور a متناظراً، ورمزنا بـ I_3, I_2, I_1 لآثار المصفوفة الأولى $\{a_{k\ell}\}_{3 \times 3}$ ، و بـ $\mathcal{I}_3, \mathcal{I}_2, \mathcal{I}_1$ لآثار المصفوفة الثانية $\{\alpha_{ij}\}_{3 \times 3}$ ، عندئذ يكون:

$$I_1 = \mathcal{I}_1, \quad I_2 = \mathcal{I}_2, \quad I_3 = \mathcal{I}_3$$

البرهان:

$$P_3(\lambda) = -\lambda^3 + I_1\lambda^2 - I_2\lambda + I_3, \quad \mathcal{P}_3(\lambda) = -\lambda^3 + \mathcal{I}_1\lambda^2 - \mathcal{I}_2\lambda + \mathcal{I}_3$$

وبحسب الملاحظة السابقة: $P_3(\lambda) \equiv \mathcal{P}_3(\lambda)$ ، وينتج من ذلك:

$$I_1 = \mathcal{I}_1, \quad I_2 = \mathcal{I}_2, \quad I_3 = \mathcal{I}_3$$

تعريف:

إذا كان a متناظر فإننا نسمي I_3, I_2, I_1 بـ لا متغيرات التتسور a .

انتهت المحاضرة.

بنامريخ 12 12 2010 .



جامعة البعث.

كلية العلوم.

قسم الرياضيات.

السنة الرابعة (ميكانيك).

علم المرونة

القسم النظري

المحاضرة السابعة والعشرون

ملاحظة: (تصحيح من المحاضرة السابقة).

في الملاحظة 1 و النتيجة 2 والتعريف الأخير من المحاضرة السابقة، لا يشترط بالتسور a أن يكون متناظراً. أس أن ما سبق ذكره صحيح حتى ولو كان التسور a غير متناظر.

----->

ضمن شروط الملاحظة 1 من المحاضرة السابقة، يكون لدينا:

(3) القيم المميزة لـ $\{a_{k\ell}\}_{3 \times 3}$ هي نفسها القيم المميزة لـ $\{a_{ij}\}_{3 \times 3}$.

نتيجة:

إذا كان التسور a متناظر فإن القيم المميزة لـ $\{a_{k\ell}\}_{3 \times 3}$ تطابق القيم المميزة لـ $\{a_{ij}\}_{3 \times 3}$ ، وهذه القيم هي ثلاثة أعداد حقيقية (لأن التسور متناظر).

ملاحظة 1:

إذا كان a متناظراً، عندئذٍ توجد جملة $Ox_1x_2x_3$ تدعى بجملة المحاور الرئيسية للتسور a ، بحيث تكون مصفوفة مركبات a فيها من الشكل:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}$$

نتيجة:

وجدنا سابقاً أن مصفوفة الانفعالات اللاغرانجية $\{e_{k\ell}(p;t)\}_{3 \times 3}$ والمتعلقة بالجملة $Ox_1x_2x_3$ تمثل المركبات في نفس الجملة $Ox_1x_2x_3$ لتسور $e(p;t)$ من المرتبة الثانية يدعى بتسور الانفعالات اللاغرانجية. بحسب نتيجة سابقة فإن هذا التسور متناظر، كما أن المقادير $I_1(p;t)$ و $I_2(p;t)$ و $I_3(p;t)$ لا تتغير بتغير الجملة $Ox_1x_2x_3$ ، وهنا ندعوها بلا متغيرات حالة الانفعال. وتوجد جملة $Ox_1x_2x_3$ بحيث تكون مصفوفة مركبات $e(p;t)$ من الشكل:

$$\begin{pmatrix} \epsilon_{11}(p;t) & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_{22}(p;t) & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_{33}(p;t) \end{pmatrix}$$

وفي علم المرونة، ندعوا حملة المحاور السابقة $Ox_1x_2x_3$ بجملة المحاور الرئيسية للانفعال. كما نسمي: $\epsilon_{11}(p;t)$, $\epsilon_{22}(p;t)$, $\epsilon_{33}(p;t)$ بالقيم الرئيسية للانفعال.

مقدمة في الهندسة التحليلية:

نقول عن المتجهات $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^3$ أنها تشكل ثلاثية يمينية مباشرة إذا وفقط إذا كان الجداء المختلط لهذه المتجهات أكبر من الصفر، أي:

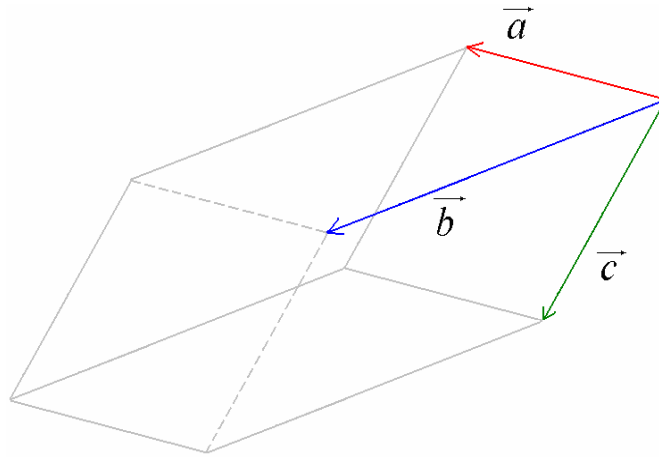
$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] > 0$$

أمثلة:

(1) $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k} \in \mathbb{R}^3$ تشكل ثلاثية يمينية مباشرة لأنه:

$$[\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}] = 1 > 0$$

(2) إذا كانت $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^3$ ثلاثية يمينية مباشرة، فإن المقدار الموجب $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]$ يعبر هندسياً عن حجم متوازي السطوح المنشأ بالأحرف $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$.



ملاحظة: (هامّة).

في الأوساط المستمرة كل ثلاثة متجهات لاغرانجية تشكل ثلاثية يمينية مباشرة يقابلها في كل لحظة $t > 0$ ثلاثة متجهات أولرية تشكل ثلاثية يمينية مباشرة.

التغير النسبي لعنصر الحجم في وسط مادي مستمر:

لـتكن $p \equiv (x_1, x_2, x_3)$ و $Q \equiv (x_1 + dx_1, x_2 + dx_2, x_3 + dx_3)$ نقطتان لاغرانجيتان من الوسط المادي المستمر واللّتان يقابلهما في لحظة التشوه $t > 0$ النقطتان الماديتان الأولريتان $p' \equiv (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ و $Q' \equiv (\xi_1 + d\xi_1, \xi_2 + d\xi_2, \xi_3 + d\xi_3)$. ولنأخذ العنصر الخطي اللاغرانجي:

$$d\vec{S}_0 = \overrightarrow{pQ} = dx_1 \vec{e}_1 + dx_2 \vec{e}_2 + dx_3 \vec{e}_3 = dx_i \vec{e}_i$$

والذي يقابله في اللحظة $t > 0$ العنصر الخطي الأولري:

$$d\vec{S} = \overrightarrow{p'Q'} = d\xi_1 \vec{e}_1 + d\xi_2 \vec{e}_2 + d\xi_3 \vec{e}_3 = d\xi_i \vec{e}_i$$

وجدنا سابقاً أن:

$$d\xi_i = \frac{\partial \xi_i}{\partial x_j}(p; t) dx_j \quad \dots\dots (*)$$

وباستخدام $v_j := \frac{dx_j}{dS_0}$ (جيوب تمام توجيه $d\vec{S}_0$) مع العلاقة (*) السابقة بالشكل:

$$d\xi_i = \frac{\partial \xi_i}{\partial x_j}(p; t) v_j dS_0$$

نعوض في عبارة $d\vec{S}$ فنجد:

$$d\vec{S} = \frac{\partial \xi_i}{\partial x_j}(p; t) v_j dS_0 \vec{e}_i = \left[\frac{\partial \xi_i}{\partial x_j}(p; t) v_j \vec{e}_i \right] dS_0 \quad \dots\dots (1)$$

لنضع:

$$d\vec{S}_0^{(1)} = \overrightarrow{pQ} = dx_1 \vec{e}_1 \quad ; \quad dx_1 > 0 \Rightarrow dS_0^{(1)} = dx_1, \quad v_j^{(1)} = \delta_{1j}$$

$$d\vec{S}_0^{(2)} = \overrightarrow{pR} = dx_2 \vec{e}_2 \quad ; \quad dx_2 > 0 \Rightarrow dS_0^{(2)} = dx_2, \quad v_j^{(2)} = \delta_{2j}$$

$$d\vec{S}_0^{(3)} = \overrightarrow{pw} = dx_3 \vec{e}_3 \quad ; \quad dx_3 > 0 \Rightarrow dS_0^{(3)} = dx_3 \quad , \quad v_j^{(3)} = \delta_{3j}$$

إن (1) صحيحة من أجل أي عنصر خطي $d\vec{S}_0$ وبالتالي فهي صحيحة من أجل $d\vec{S}_0^{(1)}$ ومن أجل $d\vec{S}_0^{(2)}$ ومن أجل $d\vec{S}_0^{(3)}$.
من أجل $d\vec{S}_0^{(1)}$ يكون:

$$\begin{aligned} d\vec{S}_0^{(1)} &= \left[\frac{\partial \xi_i}{\partial x_j}(p;t) \overbrace{v_j^{(1)}}^{\delta_{1j}} \vec{e}_i \right] dx_1 \\ &= \left[\frac{\partial \xi_i}{\partial x_j}(p;t) \delta_{1j} \vec{e}_i \right] dx_1 = \left[\frac{\partial \xi_i}{\partial x_1}(p;t) \vec{e}_i \right] dx_1 \end{aligned}$$

من أجل $d\vec{S}_0^{(2)}$ يكون:

$$\begin{aligned} d\vec{S}_0^{(2)} &= \left[\frac{\partial \xi_i}{\partial x_j}(p;t) \overbrace{v_j^{(2)}}^{\delta_{2j}} \vec{e}_i \right] dx_2 \\ &= \left[\frac{\partial \xi_i}{\partial x_j}(p;t) \delta_{2j} \vec{e}_i \right] dx_2 = \left[\frac{\partial \xi_i}{\partial x_2}(p;t) \vec{e}_i \right] dx_2 \end{aligned}$$

من أجل $d\vec{S}_0^{(3)}$ يكون:

$$\begin{aligned} d\vec{S}_0^{(3)} &= \left[\frac{\partial \xi_i}{\partial x_j}(p;t) \overbrace{v_j^{(3)}}^{\delta_{3j}} \vec{e}_i \right] dx_3 \\ &= \left[\frac{\partial \xi_i}{\partial x_j}(p;t) \delta_{3j} \vec{e}_i \right] dx_3 = \left[\frac{\partial \xi_i}{\partial x_3}(p;t) \vec{e}_i \right] dx_3 \end{aligned}$$

إن الثلاثية $d\vec{S}_0^{(1)}$ و $d\vec{S}_0^{(2)}$ و $d\vec{S}_0^{(3)}$ تشكل ثلاثية يمينية ومباشرة لأن:

$$\left[d\vec{S}_0^{(1)}, d\vec{S}_0^{(2)}, d\vec{S}_0^{(3)} \right] = \begin{vmatrix} dx_1 & 0 & 0 \\ 0 & dx_2 & 0 \\ 0 & 0 & dx_3 \end{vmatrix} = dx_1 dx_2 dx_3 > 0$$

وبالتالي فإن المقدار السابق يعبر لنا هندسياً عن الحجم اللاغرانجي dV_0 لمتوازي المستطيلات المنشأ بالأحرف $d\vec{S}_0^{(1)}$ و $d\vec{S}_0^{(2)}$ و $d\vec{S}_0^{(3)}$.

بحسب الملاحظة السابقة فإن: $d\vec{S}^{(1)}$ و $d\vec{S}^{(2)}$ و $d\vec{S}^{(3)}$ يجب أن تشكل ثلاثية يمينية مباشرة، ونرمز للحجم الناتج عنها بالرمز dV ويكون:

$$dV = \begin{vmatrix} \frac{\partial \xi_1}{\partial x_1}(p;t) dx_1 & \frac{\partial \xi_2}{\partial x_1}(p;t) dx_1 & \frac{\partial \xi_3}{\partial x_1}(p;t) dx_1 \\ \frac{\partial \xi_1}{\partial x_2}(p;t) dx_2 & \frac{\partial \xi_2}{\partial x_2}(p;t) dx_2 & \frac{\partial \xi_3}{\partial x_2}(p;t) dx_2 \\ \frac{\partial \xi_1}{\partial x_3}(p;t) dx_3 & \frac{\partial \xi_2}{\partial x_3}(p;t) dx_3 & \frac{\partial \xi_3}{\partial x_3}(p;t) dx_3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \frac{\partial \xi_1}{\partial x_1}(p;t) dx_1 & \frac{\partial \xi_2}{\partial x_1}(p;t) dx_1 & \frac{\partial \xi_3}{\partial x_1}(p;t) dx_1 \\ \frac{\partial \xi_1}{\partial x_2}(p;t) dx_2 & \frac{\partial \xi_2}{\partial x_2}(p;t) dx_2 & \frac{\partial \xi_3}{\partial x_2}(p;t) dx_2 \\ \frac{\partial \xi_1}{\partial x_3}(p;t) dx_3 & \frac{\partial \xi_2}{\partial x_3}(p;t) dx_3 & \frac{\partial \xi_3}{\partial x_3}(p;t) dx_3 \end{vmatrix} dx_1 dx_2 dx_3$$

$$\Rightarrow dV = D(p;t).dV_0$$

انتهت المحاضرة.

بنامريخ 14 12 2010 .



جامعة البعث.

كلية العلوم.

قسم الرياضيات.

السنة الرابعة (ميكانيك).

علم المرونة

القسم النظري

المحاضرة الثامنة والعشرون

تمرين 1:

لنفرض أن: $\vec{a} = a_j \vec{e}_j$

أثبت أن: $\vec{a} \wedge \vec{b} = e_{ijk} a_j b_k \vec{e}_i$

أثبت أن: $\vec{a} \wedge \vec{b} = e_{ijk} a_i b_j \vec{e}_k$

الحل:

$$\begin{aligned}
 & \text{دليل مكرر } i \\
 e_{ijk} a_j b_k \vec{e}_i &= e_{1jk} a_j b_k \vec{e}_1 + e_{2jk} a_j b_k \vec{e}_2 + e_{3jk} a_j b_k \vec{e}_3 \\
 &= (e_{123} a_2 b_3) \vec{e}_1 + (e_{132} a_3 b_2) \vec{e}_1 + (e_{231} a_3 b_1) \vec{e}_2 + (e_{213} a_1 b_3) \vec{e}_2 + \\
 & \quad + (e_{312} a_1 b_2) \vec{e}_3 + (e_{321} a_2 b_1) \vec{e}_3 \\
 &= (a_2 b_3 - a_3 b_2) \vec{e}_1 + (a_3 b_1 - a_1 b_3) \vec{e}_2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1) \vec{e}_3
 \end{aligned}$$

والمقدار الأخير ما هو إلا ناتج المحدد $\vec{a} \wedge \vec{b}$ الذي يعطى بـ:

$$\vec{a} \wedge \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

$\Rightarrow$

$$\vec{a} \wedge \vec{b} = e_{ijk} a_j b_k \vec{e}_i$$

والطلب الثاني نثبتته بنفس الطريقة.

تمرين 2:

ليكن:

$$\vec{a} = a_i \vec{e}_i, \quad \vec{b} = b_j \vec{e}_j, \quad \vec{c} = c_k \vec{e}_k$$

عندئذ أثبت أن:

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = e_{ijk} a_i b_j c_k.$$

الحل:

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = (\vec{a} \wedge \vec{b}) \cdot \vec{c} = (e_{ijk} a_i b_j \vec{e}_k) \cdot \vec{c} = e_{ijk} a_i b_j c_k.$$

تمرين 3:

لنرمز بـ $\frac{\partial f}{\partial x_i} = f_{,i}$ حيث: $f = f(x_1, x_2, x_3)$.

فإذا كانت:

$$\vec{F}(x_1, x_2, x_3) = F_i(x_1, x_2, x_3) \vec{e}_i$$

دالة متجهية. فأثبت أن:

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{F} = e_{ijk} F_{k,j} \vec{e}_i$$

الحل:نعلم أنه إذا كان: $\vec{a} = a_j \vec{e}_j$, $\vec{b} = b_k \vec{e}_k$, فإن:

$$\vec{a} \wedge \vec{b} = e_{ijk} a_j b_k \vec{e}_i$$

لدينا:

$$\overrightarrow{\text{grad}} = \frac{\partial}{\partial x_j} \vec{e}_j, \quad \vec{F} = F_k \vec{e}_k$$

وبالتالي:

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{F} = \overrightarrow{\text{grad}} \wedge \vec{F}$$

$$= e_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_j} F_k \vec{e}_i = e_{ijk} F_{k,j} \vec{e}_i$$

تمرين 4:لتكن $A = \{a_{ij}\}_{3 \times 3}$ مصفوفة أعداد حقيقية، عندئذٍ أثبت أن:

$$e_{ijk} a_{jk} = 0 ; \forall i = 1, 2, 3 \Leftrightarrow A \text{ متناظرة}$$

الحل:

نفرض أن المصفوفة A متناظرة.

بما أن A متناظرة فإن:

$$a_{jk} = a_{kj} ; \forall j, k = 1, 2, 3$$

وبالتالي:

$$e_{ijk} a_{jk} = e_{ijk} a_{kj} = e_{ikj} a_{kj} \quad (*)$$

وبما أن التبديل بين الدليلين j, k المكررين، لا يؤثر على الناتج، فإن:

$$e_{ikj} a_{kj} = e_{ijk} a_{jk}$$

نعوض في (*) فنجد:

$$e_{ijk} a_{kj} = -e_{ijk} a_{jk}$$

وهذه العلاقة محققة من أجل: $e_{ijk} a_{jk} = 0$.

(يطلب حل الاتجاه الثاني).

ملاحظة: (تصحيح من المحاضرة 26).

في المبرهنة 1، يجب أن تكون المصفوفة A متناظرة حتى تكون القيم الذاتية الثلاث المميزة لها أعداداً حقيقية.

انتهت المحاضرة.

بنامريخ 16 12 2010 .



جامعة البعث.

كلية العلوم.

قسم الرياضيات.

السنة الرابعة (ميكانيك).

علم المرونة

القسم النظري

المحاضرة التاسعة والعشرون

نتيجة 1:

$$D(p; t) > 0 ; \forall p \wedge \forall t > 0.$$

حيث:

$$D(p; t) = \left| \frac{\partial \xi_i}{\partial x_j}(p; t) \right| = \begin{vmatrix} \frac{\partial \xi_1}{\partial x_1}(p; t) & \frac{\partial \xi_1}{\partial x_2}(p; t) & \frac{\partial \xi_1}{\partial x_3}(p; t) \\ \frac{\partial \xi_2}{\partial x_1}(p; t) & \frac{\partial \xi_2}{\partial x_2}(p; t) & \frac{\partial \xi_2}{\partial x_3}(p; t) \\ \frac{\partial \xi_3}{\partial x_1}(p; t) & \frac{\partial \xi_3}{\partial x_2}(p; t) & \frac{\partial \xi_3}{\partial x_3}(p; t) \end{vmatrix}$$

تعريف 1:

نسمي المقدار الحقيقي:

$$\Delta(p; t) := \frac{dV - dV_0}{dV_0} = \frac{dV}{dV_0} - 1 = D(p; t) - 1$$

بالتغير النسبي لعنصر الحجم في النقطة اللاغرانجية p واللحظة $t > 0$.

نميز الحالات الثلاث التالية:

(1) $\Delta(p; t) > 0$ (أي $D(p; t) > 1$) عندئذ نقول أن لدينا تمديداً نسبياً لعنصر الحجم dV_0 في النقطة p واللحظة $t > 0$.

(2) $\Delta(p; t) = 0$ (أي $D(p; t) = 1$) عندئذ نقول أن لدينا محافظة نسبياً لعنصر الحجم dV_0 في النقطة p واللحظة $t > 0$.

(3) $\Delta(p; t) < 0$ (أي $0 < D(p; t) < 1$) عندئذ نقول أن لدينا تقلصاً نسبياً لعنصر الحجم dV_0 في النقطة p واللحظة $t > 0$.

ملاحظة: (من الجبر).

لتكن $A = (a_{ij})_{3 \times 3}$ و $B = (b_{ij})_{3 \times 3}$ مصفوفتا أعداد حقيقية. عندئذ باستخدام تعريف ضرب المصفوفات واستخدام اتفاقية الجمع على الأدلة المكررة، نجد:

$$A . B = C = (c_{ij})_{3 \times 3} \quad ; \quad c_{ij} = a_{ik} b_{kj}$$

$$A . A^T = C = (c_{ij})_{3 \times 3} \quad ; \quad c_{ij} = a_{ik} a_{jk}$$

$$A^T . A = C = (c_{ij})_{3 \times 3} \quad ; \quad c_{ij} = a_{ki} a_{kj}$$

ومنه النتيجة التالية:

نتيجة 2:

$$[D(p;t)]^2 = |2e_{ij}(p;t) + \delta_{ij}| \quad ; \quad \forall p \wedge \forall t > 0$$

البرهان:

لدينا:

$$D(p;t) = \left| \frac{\partial \xi_i}{\partial x_j}(p;t) \right| \quad ; \quad i, j = 1, 2, 3$$

لنضع:

$$A(p;t) := [a_{ij}(p;t)]_{3 \times 3} \quad ; \quad a_{ij}(p;t) := \frac{\partial \xi_i}{\partial x_j}(p;t)$$

لدينا من جهة أولى بحسب خواص المعينات:

$$[D(p;t)]^2 = |A|^2 = |A| \cdot |A| = |A^T| \cdot |A| = |A^T \cdot A|$$

وهذا أمر واضح. ومن جهة أخرى:

$$A^T \cdot A = [a_{ki}(p;t) \cdot a_{kj}(p;t)]_{3 \times 3} \quad \dots\dots\dots (1)$$

ولكن:

$$a_{ki}(p;t) \cdot a_{kj}(p;t) = \frac{\partial \xi_k}{\partial x_i}(p;t) \cdot \frac{\partial \xi_k}{\partial x_j}(p;t)$$

وبما أن:

$$\frac{\partial \xi_k}{\partial x_i}(p;t) \cdot \frac{\partial \xi_k}{\partial x_j}(p;t) = 2e_{ij}(p;t) + \delta_{ij}$$

$\Rightarrow$

$$a_{ki}(p;t) \cdot a_{kj}(p;t) = 2e_{ij}(p;t) + \delta_{ij}$$

نعوض في (1) فنجد:

$$A^T \cdot A = [2e_{ij}(p;t) + \delta_{ij}]_{3 \times 3}$$

بأخذ معين الطرفين نجد أنه:

$$[D(p;t)]^2 = |2e_{ij}(p;t) + \delta_{ij}| \quad ; \quad \forall p \wedge \forall t > 0$$

وهو المطلوب.

نتيجة 3:

$$\Delta(p;t) = \sqrt{|2e_{ij}(p;t) + \delta_{ij}|} - 1 \quad ; \quad \forall p \wedge \forall t > 0.$$

نتيجة 4:

لنرمز بـ:

$$I_1(p;t) = e_{11}(p;t) + e_{22}(p;t) + e_{33}(p;t) = e_{ii}(p;t)$$

$$I_2(p;t) = \begin{vmatrix} e_{22}(p;t) & e_{23}(p;t) \\ e_{32}(p;t) & e_{33}(p;t) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} e_{11}(p;t) & e_{13}(p;t) \\ e_{31}(p;t) & e_{33}(p;t) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} e_{11}(p;t) & e_{12}(p;t) \\ e_{21}(p;t) & e_{22}(p;t) \end{vmatrix}$$

$$I_3(p;t) = |e_{ij}(p;t)|$$

للامتغيرات حالة الانفعال مكتوبة في الجملة $Ox_1x_2x_3$. عندئذ يكون:

$$[D(p;t)]^2 = 1 + 2I_1(p;t) + 4I_2(p;t) + 8I_3(p;t)$$

البرهان:

إذا كانت I_1, I_2, I_3 هي آثار مصفوفة الأعداد الحقيقية $A = (a_{ij})_{3 \times 3}$ ، فوجدنا سابقاً أن:

$$P_3(\lambda) = |a_{ij} - \lambda \delta_{ij}| = -\lambda^3 + I_1 \lambda^2 - I_2 \lambda + I_3$$

$\Rightarrow$

$$\begin{aligned} [D(p;t)]^2 &= |2e_{ij}(p;t) + \delta_{ij}| = \left| 2 \left[e_{ij}(p;t) - \left(-\frac{1}{2} \right) \delta_{ij} \right] \right| \\ &= 2^3 \left| \left[e_{ij}(p;t) - \left(-\frac{1}{2} \right) \delta_{ij} \right] \right| = 8 \left| \left[e_{ij}(p;t) - \left(-\frac{1}{2} \right) \delta_{ij} \right] \right| \\ &= 8 \left[\frac{1}{8} + \frac{1}{4} I_1(p;t) + \frac{1}{2} I_2(p;t) + I_3(p;t) \right] \\ &= 1 + 2I_1(p;t) + 4I_2(p;t) + 8I_3(p;t) \end{aligned}$$

وهو المطلوب.

نتيجة 5:

$$\Delta(p;t) = \sqrt{1 + 2I_1(p;t) + 4I_2(p;t) + 8I_3(p;t)} - 1$$

نتيجة 6:

إذا كانت $Ox_1x_2x_3$ هي جملة المحاور الرئيسية للانفعالات اللاغرانجية، عندئذٍ نكتب مصفوفة الانفعالات اللاغرانجية المتعلقة بهذه الجملة بالشكل:

$$\begin{pmatrix} e_{11}(p;t) & 0 & 0 \\ 0 & e_{22}(p;t) & 0 \\ 0 & 0 & e_{33}(p;t) \end{pmatrix}$$

حيث:

$$e_1(p;t) := e_{11}(p;t) \quad , \quad e_2(p;t) := e_{22}(p;t) \quad , \quad e_3(p;t) := e_{33}(p;t)$$

هي القيم الرئيسية للانفعالات اللاغرانجية، عندئذٍ:

$$I_1(p;t) = e_1(p;t) + e_2(p;t) + e_3(p;t)$$

$$I_2(p;t) = e_2(p;t) \cdot e_3(p;t) + e_1(p;t) \cdot e_3(p;t) + e_1(p;t) \cdot e_2(p;t)$$

$$I_3(p; t) = e_1(p; t) \cdot e_2(p; t) \cdot e_3(p; t)$$

وعندئذٍ يصبح التغير النسبي $\Delta(p; t)$ بالشكل:

$$\begin{aligned} \Delta(p; t) &= \sqrt{1 + 2I_1(p; t) + 4I_2(p; t) + 8I_3(p; t)} \\ &= \sqrt{1 + 2[e_1 + e_2 + e_3] + 4[e_2e_3 + e_1e_3 + e_1e_2] + 8[e_1e_2e_3]} - 1 \end{aligned}$$

في الامتحان يجب دائماً أن نكتب e_1, e_2, e_3 بالشكل: $e_1(p; t), e_2(p; t), e_3(p; t)$ ولا يجوز كتابتها بدون $(p; t)$.

$$= \sqrt{[1 + 2e_1(p; t)] \cdot [1 + 2e_2(p; t)] \cdot [1 + 2e_3(p; t)]} - 1$$

$\Rightarrow$

$$\Delta(p; t) = \sqrt{1 + 2e_1(p; t)} \cdot \sqrt{1 + 2e_2(p; t)} \cdot \sqrt{1 + 2e_3(p; t)} - 1$$

وبما أن:

$$\lambda_1 = \lambda_{11} = -1 + \sqrt{1 + 2e_1(p; t)},$$

$$\lambda_2 = \lambda_{22} = -1 + \sqrt{1 + 2e_2(p; t)},$$

$$\lambda_3 = \lambda_{33} = -1 + \sqrt{1 + 2e_3(p; t)}$$

هي التغيرات النسبية في النقطة p واللحظة $t > 0$ باتجاه المحاور الرئيسية للانفعال فإن:

$$\Delta(p; t) = (1 + \lambda_1) \cdot (1 + \lambda_2) \cdot (1 + \lambda_3) - 1$$

$$= \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_1\lambda_2\lambda_3 \quad \dots\dots\dots (*)$$

و (*) تعطينا التغير النسبي لعنصر الحجم dV_0 في النقطة p واللحظة $t > 0$ بدلالة التغيرات النسبية في النقطة p واللحظة $t > 0$ باتجاه المحاور الرئيسية للانفعال.

انتهت المحاضرة.

بنامريخ 19 12 2010 .



جامعة البعث.

كلية العلوم.

قسم الرياضيات.

السنة الرابعة (ميكانيك).

علم المرونة

القسم النظري

المحاضرة الثلاثون

الجسم الصلب: (النظرية الخطية للمرونة الكلاسيكية).

الجسم الصلب هو جسم مرن فيه مركبات متجه الإزاحة صغيرة جداً، بالمقارنة مع أبعاد الجسم. كما أن المشتقات الجزئية الأولى اللاغرانجية والأولرية لمركبات متجه الإزاحة $\bar{u}$ بالقيمة المطلقة أصغر بكثير من الواحد. وبالتالي يمكن إهمال جداءات هذه المشتقات الجزئية الأولى.

ملاحظة 1:

إذا كان: $f(p; t)$ ، حيث: $p \equiv (x_1, x_2, x_3)$. عندئذٍ نكتب الرمز: $\cdot f_{,i} \equiv \frac{\partial f}{\partial x_i}$

$$\text{وكذلك: } \cdot f_{,ij} \equiv \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$$

أما إذا كان: $g(p'; t)$ ، حيث: $p' \equiv (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$. عندئذٍ نكتب الرمز: $\cdot g_{,i} \equiv \frac{\partial g}{\partial \xi_i}$

$$\text{وكذلك: } \cdot g_{,ij} \equiv \frac{\partial^2 g}{\partial \xi_i \partial \xi_j}$$

ملاحظة 2:

في الأوساط المستمرة يكون دائماً: $\cdot f_{,ij} = f_{,ji}$ وكذلك: $\cdot g_{,ij} = g_{,ji}$

مصفوفة الانفعالات اللاغرانجية، ومصفوفة الدورانات اللاغرانجية، للجسم الصلب:

وجدنا سابقاً أن:

$$\begin{aligned} e_{ij}(p; t) &= \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u_i}{\partial x_j}(p; t) + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}(p; t) + \frac{\partial u_k}{\partial x_i}(p; t) \cdot \frac{\partial u_k}{\partial x_j}(p; t) \right] \\ &\approx \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u_i}{\partial x_j}(p; t) + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}(p; t) \right] \quad \text{في الجسم الصلب} \\ &= \frac{1}{2} [u_{i,j}(p; t) + u_{j,i}(p; t)] \end{aligned}$$

لنضع:

$$\varepsilon_{ij}(p;t) := \frac{1}{2} [u_{i,j}(p;t) + u_{j,i}(p;t)] \quad ; \quad i, j = 1, 2, 3.$$

فيكون عندئذ:

$$e_{ij}(p;t) \cong \varepsilon_{ij}(p;t) \quad ; \quad i, j = 1, 2, 3.$$

ندعوا $\{\varepsilon_{ij}(p;t)\}_{3 \times 3}$ بمصفوفة الانفعالات اللاغرانجية للجسم الصلب، والمتعلقة بالجملة $Ox_1x_2x_3$.

مثال:

$$\varepsilon_{11}(p;t) = u_{1,1}(p;t)$$

$$\varepsilon_{22}(p;t) = u_{2,2}(p;t)$$

$$\varepsilon_{33}(p;t) = u_{3,3}(p;t)$$

$$\varepsilon_{12}(p;t) = \frac{1}{2} [u_{1,2}(p;t) + u_{2,1}(p;t)] = \varepsilon_{21}(p;t)$$

$$\varepsilon_{13}(p;t) = \frac{1}{2} [u_{1,3}(p;t) + u_{3,1}(p;t)] = \varepsilon_{31}(p;t)$$

$$\varepsilon_{23}(p;t) = \frac{1}{2} [u_{3,2}(p;t) + u_{2,3}(p;t)] = \varepsilon_{32}(p;t)$$

وفي الوسط المادي المستمر تكون مصفوفة الدورانات اللاغرانجية هي:

$$\gamma_{ij}(p;t) = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u_i}{\partial x_j}(p;t) - \frac{\partial u_j}{\partial x_i}(p;t) - \frac{\partial u_k}{\partial x_i}(p;t) \cdot \frac{\partial u_k}{\partial x_j}(p;t) \right]$$

$$\approx \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u_i}{\partial x_j}(p;t) - \frac{\partial u_j}{\partial x_i}(p;t) \right] \quad \text{في الجسم الصلب}$$

$$= \frac{1}{2} [u_{i,j}(p;t) - u_{j,i}(p;t)]$$

لنضع:

$$\omega_{ij}(p;t) := \frac{1}{2} [u_{i,j}(p;t) - u_{j,i}(p;t)] \quad ; \quad i, j = 1, 2, 3.$$

فيكون عندئذ:

$$\gamma_{ij}(p;t) \cong \omega_{ij}(p;t) \quad ; \quad i, j = 1, 2, 3.$$

ندعوا $\{\omega_{ij}(p;t)\}_{3 \times 3}$ بمصفوفة الدورانات اللاغرانجية للجسم الصلب، والمتعلقة بالجملة $Ox_1x_2x_3$.

مثال:

$$\omega_{11}(p;t) = 0$$

$$\omega_{22}(p;t) = 0$$

$$\omega_{33}(p;t) = 0$$

$$\omega_{12}(p;t) = \frac{1}{2} [u_{1,2}(p;t) - u_{2,1}(p;t)] = -\omega_{21}(p;t)$$

$$\omega_{13}(p;t) = \frac{1}{2} [u_{1,3}(p;t) - u_{3,1}(p;t)] = -\omega_{31}(p;t)$$

$$\omega_{23}(p;t) = \frac{1}{2} [u_{2,3}(p;t) - u_{3,2}(p;t)] = -\omega_{32}(p;t)$$

أي أن مصفوفة الدورانات اللاغرانجية للجسم الصلب متناظرة عكسياً.

أما بالنسبة لمصفوفة الانفعالات الأولرية، ومصفوفة الدورانات الأولرية، فتستنتجان بطريقة مشابهة.

المعنى الهندسي لمصفوفة الانفعالات اللاغرانجية للجسم الصلب:

لدينا:

$$(dS)^2 - (dS_0)^2 = 2e_{ij}(p;t) dx_i dx_j$$

$$\cong 2\varepsilon_{ij}(p;t) dx_i dx_j \quad (\text{في الجسم الصلب})$$

كما أن:

$$\lambda_{pQ} \left(1 + \frac{1}{2} \lambda_{pQ} \right) = e_{ij}(p;t) v_i v_j$$

$$\cong \varepsilon_{ij}(p;t) v_i v_j \quad (\text{في الجسم الصلب})$$

$$\lambda_{11} = -1 + \sqrt{1 + 2e_{11}(p;t)}$$

$$\cong -1 + \sqrt{1 + 2\varepsilon_{11}(p;t)} \quad (\text{في الجسم الصلب})$$

وبما أن:

$$|u_{1,1}(p;t)| \ll 1, \quad \varepsilon_{11}(p;t) = u_{1,1}(p;t)$$

فتبقى المساواة: $2\varepsilon_{11}(p;t) = 2u_{1,1}(p;t)$ ، محققة لـ:

$$|\varepsilon_{11}(p;t)| \ll 1$$

وبالتالي:

$$\sqrt{1 + 2\varepsilon_{11}(p;t)} \cong 1 + \frac{1}{2} [2\varepsilon_{11}(p;t)] = 1 + \varepsilon_{11}(p;t)$$

ومنه:

$$\lambda_{11} \cong -1 + 1 + \varepsilon_{11}(p;t) = \varepsilon_{11}(p;t)$$

والتغير النسبي λ_{11} باتجاه المحور $\overrightarrow{Ox_1}$ في النقطة p واللحظة $t > 0$ هو نفسه $\varepsilon_{11}(p;t)$ ، وبالتالي يكون لدينا تمدد نسبي في النقطة p واللحظة $t > 0$ باتجاه المحور $\overrightarrow{Ox_1}$ إذا وفقط إذا كان $\varepsilon_{11}(p;t) > 0$ ، وعندئذ قيمة التمدد النسبي المذكور هي نفسها $\varepsilon_{11}(p;t)$. ويكون لدينا تقلص نسبي في النقطة p واللحظة $t > 0$ باتجاه المحور $\overrightarrow{Ox_1}$ إذا وفقط إذا كان $\varepsilon_{11}(p;t) < 0$ ، وعندئذ قيمة التقلص النسبي المذكور هي نفسها

$\overrightarrow{Ox_1}$ ويكون لدينا محافظة نسبية في النقطة p واللحظة $t > 0$ باتجاه المحور $\overrightarrow{Ox_1}$ إذا وفقط إذا كان $\varepsilon_{11}(p;t) = 0$.

وبنفس الطريقة نجد في الجسم الصلب أن: $\lambda_{22} \equiv \varepsilon_{22}(p;t)$. والتغير النسبي λ_{22} باتجاه المحور $\overrightarrow{Ox_2}$ في النقطة p واللحظة $t > 0$ هو نفسه $\varepsilon_{22}(p;t)$ ، وبالتالي يكون لدينا تمدد نسبي في النقطة p واللحظة $t > 0$ باتجاه المحور $\overrightarrow{Ox_2}$ إذا وفقط إذا كان $\varepsilon_{22}(p;t) > 0$ ، وعندئذ قيمة التمدد النسبي المذكور هي نفسها $\varepsilon_{22}(p;t)$. ويكون لدينا تقلص نسبي في النقطة p واللحظة $t > 0$ باتجاه المحور $\overrightarrow{Ox_2}$ إذا وفقط إذا كان $\varepsilon_{22}(p;t) < 0$ ، وعندئذ قيمة التقلص النسبي المذكور هي نفسها $\varepsilon_{22}(p;t)$. ويكون لدينا محافظة نسبية في النقطة p واللحظة $t > 0$ باتجاه المحور $\overrightarrow{Ox_2}$ إذا وفقط إذا كان $\varepsilon_{22}(p;t) = 0$.

وبنفس الطريقة أيضاً نجد في الجسم الصلب أن: $\lambda_{33} \equiv \varepsilon_{33}(p;t)$. والتغير النسبي λ_{33} باتجاه المحور $\overrightarrow{Ox_3}$ في النقطة p واللحظة $t > 0$ هو نفسه $\varepsilon_{33}(p;t)$ ، وبالتالي يكون لدينا تمدد نسبي في النقطة p واللحظة $t > 0$ باتجاه المحور $\overrightarrow{Ox_3}$ إذا وفقط إذا كان $\varepsilon_{33}(p;t) > 0$ ، وعندئذ قيمة التمدد النسبي المذكور هي نفسها $\varepsilon_{33}(p;t)$. ويكون لدينا تقلص نسبي في النقطة p واللحظة $t > 0$ باتجاه المحور $\overrightarrow{Ox_3}$ إذا وفقط إذا كان $\varepsilon_{33}(p;t) < 0$ ، وعندئذ قيمة التقلص النسبي المذكور هي نفسها $\varepsilon_{33}(p;t)$. ويكون لدينا محافظة نسبية في النقطة p واللحظة $t > 0$ باتجاه المحور $\overrightarrow{Ox_3}$ إذا وفقط إذا كان $\varepsilon_{33}(p;t) = 0$.

كما أن:

$$(1 + \lambda_{11})(1 + \lambda_{22}).\cos(\varphi^*(1,2)) = 2e_{12}(p;t) \Rightarrow$$

$$\cos(\varphi^*(1,2)) = \frac{2e_{12}(p;t)}{(1 + \lambda_{11})(1 + \lambda_{22})}$$

$$\cong \frac{2\varepsilon_{12}(p;t)}{(1 + \varepsilon_{11}(p;t))(1 + \varepsilon_{22}(p;t))} \quad (\text{في الجسم الصلب})$$

وإذا كان: $\varepsilon_{11}(p;t) = 0 \quad \wedge \quad \varepsilon_{22}(p;t) = 0$

يصبح لدينا:

$$\cos(\varphi^*(1,2)) \cong 2\varepsilon_{12}(p;t)$$

$\Rightarrow$

$$\sin\left[\frac{\pi}{2} - \varphi^*(1,2)\right] \cong 2\varepsilon_{12}(p;t) \quad ; \quad 2\varepsilon_{12}(p;t) \ll 1$$

$\Rightarrow$

$$\frac{\pi}{2} - \varphi^*(1,2) \cong 2\varepsilon_{12}(p;t)$$

ندعوا الزاوية: $\beta(1,2) := \frac{\pi}{2} - \varphi^*(1,2)$ بزاوية التشوه الشكلي في النقطة p واللحظة $t > 0$ ما بين الاتجاهين 1 و 2.

$$\text{ومنه النتيجة التالية: } \varepsilon_{12}(p;t) = \frac{1}{2} \beta(1,2)$$

والمعنى الهندسي لـ $\varepsilon_{12}(p;t)$ (وهو نفسه المعنى الهندسي لـ $\varepsilon_{21}(p;t)$) هو: إن هذا المقدار يعبر عن نصف زاوية التشوه الشكلي في النقطة p واللحظة $t > 0$ ما بين الاتجاهين 1 و 2. (بشرط $\varepsilon_{11}(p;t) = 0 \wedge \varepsilon_{22}(p;t) = 0$).

بشكل مشابه نجد المعنى الهندسي لبقية عناصر فوق وتحت القطر الرئيسي لمصفوفة الانفعالات اللاغرانجية للجسم الصلب.

فكما نعلم:

$$(1 + \lambda_{11})(1 + \lambda_{33}).\cos(\varphi^*(1,3)) = 2e_{13}(p;t) \Rightarrow$$

$$\cos(\varphi^*(1,3)) = \frac{2e_{13}(p;t)}{(1 + \lambda_{11})(1 + \lambda_{33})}$$

$$\cong \frac{2\varepsilon_{13}(p;t)}{(1 + \varepsilon_{11}(p;t))(1 + \varepsilon_{33}(p;t))} \quad (\text{في الجسم الصلب})$$

$$\text{وإذا كان: } \varepsilon_{11}(p;t) = 0 \wedge \varepsilon_{33}(p;t) = 0$$

يصبح لدينا:

$$\cos(\varphi^*(1,3)) \cong 2\varepsilon_{13}(p;t)$$

$$\Rightarrow$$

$$\sin\left[\frac{\pi}{2} - \varphi^*(1,3)\right] \cong 2\varepsilon_{13}(p;t) \quad ; \quad 2\varepsilon_{13}(p;t) \ll 1$$

$$\Rightarrow$$

$$\frac{\pi}{2} - \varphi^*(1,3) \cong 2\varepsilon_{13}(p;t)$$

ندعوا الزاوية: $\beta(1,3) := \frac{\pi}{2} - \varphi^*(1,3)$ بزاوية التشوه الشكلي في النقطة p واللحظة $t > 0$ ما بين الاتجاهين 1 و 3.

$$\text{ومنه النتيجة التالية: } \varepsilon_{13}(p;t) = \frac{1}{2} \beta(1,3)$$

والمعنى الهندسي لـ $\varepsilon_{13}(p;t)$ (وهو نفسه المعنى الهندسي لـ $\varepsilon_{31}(p;t)$) هو: إن هذا المقدار يعبر عن نصف زاوية التشوه الشكلي في النقطة p واللحظة $t > 0$ ما بين الاتجاهين 1 و 3. (بشرط $\varepsilon_{11}(p;t) = 0 \wedge \varepsilon_{33}(p;t) = 0$).

وكذلك فإن:

$$(1 + \lambda_{22})(1 + \lambda_{33}) \cdot \cos(\varphi^*(2,3)) = 2e_{23}(p;t) \Rightarrow$$

$$\cos(\varphi^*(2,3)) = \frac{2e_{23}(p;t)}{(1 + \lambda_{22})(1 + \lambda_{33})}$$

$$\cong \frac{2\varepsilon_{23}(p;t)}{(1 + \varepsilon_{22}(p;t))(1 + \varepsilon_{33}(p;t))} \quad (\text{في الجسم الصلب})$$

$$\text{وإذا كان: } \varepsilon_{22}(p;t) = 0 \wedge \varepsilon_{33}(p;t) = 0$$

يصبح لدينا:

$$\cos(\varphi^*(2,3)) \cong 2\varepsilon_{23}(p;t)$$

$\Rightarrow$

$$\sin\left[\frac{\pi}{2} - \varphi^*(2,3)\right] \cong 2\varepsilon_{23}(p;t) \quad ; \quad 2\varepsilon_{23}(p;t) \ll 1$$

$\Rightarrow$

$$\frac{\pi}{2} - \varphi^*(2,3) \cong 2\varepsilon_{23}(p;t)$$

ندعوا الزاوية: $\beta(2,3) := \frac{\pi}{2} - \varphi^*(2,3)$ بزاوية التشوه الشكلي في النقطة p واللحظة $t > 0$ ما بين الاتجاهين 1 و 3.

$$\text{ومنه النتيجة التالية: } \varepsilon_{23}(p;t) = \frac{1}{2} \beta(2,3)$$

والمعنى الهندسي لـ $\varepsilon_{23}(p;t)$ (وهو نفسه المعنى الهندسي لـ $\varepsilon_{32}(p;t)$) هو: إن هذا المقدار يعبر عن نصف زاوية التشوه الشكلي في النقطة p واللحظة $t > 0$ ما بين الاتجاهين 2 و 3. (بشرط $\varepsilon_{22}(p;t) = 0 \quad \wedge \quad \varepsilon_{33}(p;t) = 0$).

التغير النسبي لعنصر الحجم في الجسم الصلب:

وجدنا سابقاً أن:

$$\Delta(p;t) = \lambda_{11} + \lambda_{22} + \lambda_{33} + \lambda_{11}\lambda_{22} + \lambda_{11}\lambda_{33} + \lambda_{22}\lambda_{33} + \lambda_{11}\lambda_{22}\lambda_{33}$$

$$\cong \varepsilon_{11}(p;t) + \varepsilon_{22}(p;t) + \varepsilon_{33}(p;t) + \varepsilon_{11}(p;t)\varepsilon_{22}(p;t) +$$

$$+ \varepsilon_{11}(p;t)\varepsilon_{33}(p;t) + \varepsilon_{22}(p;t)\varepsilon_{33}(p;t) + \varepsilon_{11}(p;t)\varepsilon_{22}(p;t)\varepsilon_{33}(p;t)$$

(في الجسم الصلب)

$$\cong \varepsilon_{11}(p;t) + \varepsilon_{22}(p;t) + \varepsilon_{33}(p;t)$$

وبالتالي فالتغير النسبي لعنصر الحجم في الجسم الصلب في النقطة p واللحظة $t > 0$ هو مجموع عناصر القطر الرئيسي لمصفوفة الانفعالات اللاغرانجية للجسم الصلب.

نتيجة 1:

$$\Delta(p;t) \equiv \operatorname{div} (\vec{u}(p;t))$$

الإثبات:

$$\Delta(p;t) \equiv \varepsilon_{11}(p;t) + \varepsilon_{22}(p;t) + \varepsilon_{33}(p;t)$$

$$= u_{1,1}(p;t) + u_{2,2}(p;t) + u_{3,3}(p;t) = \operatorname{div} (\vec{u}(p;t))$$

وهو المطلوب.

انتهت المحاضرة.

بنامريخ 21 12 2010 .



جامعة البعث.

كلية العلوم.

قسم الرياضيات.

السنة الرابعة (ميكانيك).

علم المرونة

القسم النظري

المحاضرة الحادية والثلاثون

معادلات الاستمرار في الجسم الصلب:

وجدنا في المحاضرة السابقة أن مصفوفة الانفعالات اللاغرانجية للجسم الصلب والمتعلقة بالجملة $O x_1 x_2 x_3$ هي $\{\varepsilon_{ij}(p; t)\}_{3 \times 3}$ حيث:

$$\varepsilon_{ij}(p; t) = \frac{1}{2} [u_{i,j}(p; t) + u_{j,i}(p; t)] \quad \dots\dots\dots (1)$$

وذلك من أجل كل $t > 0$ ، وكل $p \equiv (x_1, x_2, x_3) \in B$.
كما أن مصفوفة الانفعالات الأولرية للجسم الصلب والمتعلقة بنفس الجملة $O x_1 x_2 x_3$ هي:

$$K_{ij}(p'; t) = \frac{1}{2} [u_{i,j}(p'; t) + u_{j,i}(p'; t)] \quad \dots\dots\dots (2)$$

وذلك من أجل كل $t > 0$ ، وكل $p' \equiv (\xi_1, \xi_2, \xi_3) \in B'$.

آ. معدلات الاستمرار اللاغرانجية:

نلاحظ أن الانفعالات اللاغرانجية $\varepsilon_{ij}(p; t)$ تحقق المطابقة:

$$\varepsilon_{ij,k\ell}(p; t) + \varepsilon_{k\ell,ij}(p; t) - \varepsilon_{ik,j\ell}(p; t) - \varepsilon_{j\ell,ik}(p; t) \equiv 0 \quad \dots\dots\dots (3)$$

وذلك من أجل كل $t \geq 0$ ، وكل $p \equiv (x_1, x_2, x_3) \in B$.
ندعوا المعادلات (3) بمعادلات الاستمرار اللاغرانجية للجسم الصلب.

ب. معدلات الاستمرار الأولرية:

نلاحظ أن الانفعالات الأولرية $K_{ij}(p; t)$ تحقق المطابقة:

$$K_{ij,k\ell}(p'; t) + K_{k\ell,ij}(p'; t) - K_{ik,j\ell}(p'; t) - K_{j\ell,ik}(p'; t) \equiv 0 \quad \dots\dots\dots (4)$$

وذلك من أجل كل $t \geq 0$ ، وكل $p' \equiv (\xi_1, \xi_2, \xi_3) \in B'$.
ندعوا المعادلات (4) بمعادلات الاستمرار الأولرية للجسم الصلب.

ملاحظة:

للتحقق من صحة المطابقتين (3)، (4) نستخدم العلاقتين (1)، (2) من خلال تعويضهما في المطابقتين كل قيمة بما يساويها.

تمرين: (تتمة من محاضرة سابقة).

أثبت صحة التكافؤ:

$$e_{ijk} a_{jk} = 0 ; \forall i, j = 1, 2, 3 \quad \Leftrightarrow \quad \text{متناظرة} \quad A = \{a_{jk}\}_{3 \times 3}$$

الحل:

تم إثبات الاتجاه الأول:

$$e_{ijk} a_{jk} = 0 ; \forall i, j = 1, 2, 3 \quad \Leftarrow \quad \text{متناظرة} \quad A = \{a_{jk}\}_{3 \times 3}$$

ولنثبت صحة الاتجاه الثاني:

$$e_{ijk} a_{jk} = 0 ; \forall i, j = 1, 2, 3 \quad \Rightarrow \quad \text{متناظرة} \quad A = \{a_{jk}\}_{3 \times 3} \quad ???$$

بالفرض لدينا:

$$e_{ijk} a_{jk} = 0 ; \forall i, j = 1, 2, 3$$

نضرب الطرفين بـ e_{imn} فنحصل على:

$$e_{imn} e_{ijk} a_{jk} = 0 ; \quad e_{imn} e_{ijk} = \delta_{jm} \delta_{kn} - \delta_{jn} \delta_{km} \quad \text{حسب تمرين سابق}$$

$$\Rightarrow$$

$$(\delta_{jm} \delta_{kn} - \delta_{jn} \delta_{km}) \cdot a_{jk} = 0 \Rightarrow$$

$$\delta_{jm} \delta_{kn} a_{jk} - \delta_{jn} \delta_{km} a_{jk} = 0 \Rightarrow$$

$$a_{mn} - a_{nm} = 0 \Rightarrow a_{mn} = a_{nm} ; \quad \forall m, n = 1, 2, 3$$

وبالتالي فالمصفوفة $A = \{a_{jk}\}_{3 \times 3}$ متناظرة. وهو المطلوب.**انتهت المحاضرة.**

بناريخ 23 12 2010 .

نهاية المقرر.

تم بعون الله في 23 - 12 - 2010 .